

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич  
Должность: Директор  
Дата подписания: 03.11.2023 09:19:24  
Уникальный программный ключ:  
b683afe664d7e9f64175886cf9626a198149ad36

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»**

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Рабочая программа общеобразовательной учебной дисциплины**

дисциплина ПУД .02 Математика

Общеобразовательный цикл, обязательная часть

цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

**38.02.06**

код

специальность

Финансы

наименование специальности

квалификация

Финансист

Год начала подготовки

2023

Разработчик (составитель)

И.Г.Аслаев преподаватель

ученая степень, ученое звание,

категория Ф.И.О.

Стерлитамак 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ</b> .....	<b>3</b>
1.1. Область применения рабочей программы .....	3
1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы .3	
<b>2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ</b> .....	<b>6</b>
2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы .....	6
2.2. Тематический план и содержание дисциплины.....	7
<b>3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ</b> .....	<b>22</b>
<b>4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ</b> .....	<b>22</b>
4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению .....	22
4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины .....	22
4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	22
4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля) .....	22
4.2.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).....	23
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1</b> .....	<b>24</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2</b> .....	<b>33</b>

# 1. ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Область применения рабочей программы

Рабочая программа общеобразовательной учебной дисциплины является частью основной образовательной программы в соответствии с ФГОС для специальности 38.02.06 Финансы (укрупнённая группа специальностей 38.00.00 Экономика и управление (уровень 3), для обучающихся очной формы обучения.

Рабочая программа разработана в соответствии с ФГОС среднего общего образования.

## 1.2. Место учебной дисциплины в структуре основной образовательной программы

Общеобразовательная учебная дисциплина «Математика» изучается в общеобразовательном цикле учебного плана ООП СПО на базе основного общего образования с получением среднего общего образования (ППССЗ)

## 1.3. Планируемые результаты освоения дисциплины:

1.3.1 Освоение содержания общеобразовательной учебной дисциплины обеспечивает достижения обучающимися следующих результатов:

### **Личностных:**

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к себе, к своему здоровью, к познанию себя:*

-готовность и способность обучающихся к отстаиванию личного достоинства, собственного мнения, готовность и способность вырабатывать собственную позицию по отношению к общественно-политическим событиям прошлого и настоящего на основе осознания и осмысления истории, духовных ценностей и достижений нашей страны;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к России как к Родине (Отечеству):*

-формирование уважения к русскому языку как государственному языку Российской Федерации, являющемуся основой российской идентичности и главным фактором национального самоопределения;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к закону, государству и к гражданскому обществу:*

-мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики, основанное на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся с окружающими людьми:*

-нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей, толерантного сознания и поведения в поликультурном мире, готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения;

-развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к окружающему миру, живой природе, художественной культуре:*

-готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

-эстетическое отношения к миру, готовность к эстетическому обустройству собственного быта.

*Личностные результаты в сфере отношения обучающихся к труду, в сфере социально-экономических отношений:*

-осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

-готовность обучающихся к трудовой профессиональной деятельности как к возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

-готовность к самообслуживанию, включая обучение и выполнение домашних обязанностей.

### **Метапредметных:**

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы представлены тремя группами универсальных учебных действий (УУД).

#### **1. Регулятивные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

#### **2. Познавательные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

#### **3. Коммуникативные универсальные учебные действия**

Обучающийся научится:

-развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств.

### **Предметных:**

В результате изучения учебного предмета «Математика» на уровне среднего общего образования обучающийся на углубленном уровне научится:

использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений; проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;

выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; записывать, сравнивать, округлять числовые данные реальных величин с использованием разных систем измерения; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств;

определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.); интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации; определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.);

решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты;

вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни; выбирать методы подходящего представления и обработки данных;

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат;

владеть понятиями векторы и их координаты; уметь выполнять операции над векторами; использовать скалярное произведение векторов при решении задач; применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач; применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач.

Обучающийся на углубленном уровне получит возможность научиться:

использовать теоретико-множественный язык и язык логики для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов

свободно оперировать числовыми множествами при решении задач;

понимать причины и основные идеи расширения числовых множеств;

владеть основными понятиями теории делимости при решении стандартных задач

иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;

свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений;

владеть формулой бинома Ньютона;

уметь выполнять запись числа в позиционной системе счисления;

применять при решении задач Основную теорему алгебры;

применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования

свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

свободно решать системы линейных уравнений;

решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами;

применять при решении задач неравенства Коши-Буняковского, Бернулли;

владеть понятием асимптоты и уметь его применять при решении задач;

применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков;

свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;

свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;

оперировать понятием первообразной функции для решения задач;

овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона–Лейбница и его простейших применениях

оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;

уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;

уметь применять приложение производной и определенного интеграла к решению задач естествознания;

владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость

иметь представление о центральной предельной теореме

иметь представление о выборочном коэффициенте корреляции и линейной регрессии;

иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;

иметь представление о связи эмпирических и теоретических распределений  
 иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;  
 иметь представление об аксиоматическом методе;  
 уметь применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов, трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла;  
 владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;  
 иметь представление о двойственности правильных многогранников;  
 иметь представление об аксиомах объема, применять формулы объемов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;  
 иметь представление о движениях в пространстве: параллельном переносе, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте относительно прямой, винтовой симметрии, уметь применять их при решении задач;  
 уметь применять формулы объемов при решении задач;  
 находить объем параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;  
 - задавать прямую в пространстве;  
 находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;  
 находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.

## 2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1 Объем дисциплины и виды учебной работы

<i>Вид учебной работы</i>	<i>Объем часов</i>
<b>Объем образовательной программы</b>	<b>332</b>
<b>Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем</b>	<b>326</b>
в том числе:	
лекции (уроки)	170
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
практические занятия	162
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
лабораторные занятия	
в форме практической подготовки (если предусмотрено)	*
<b>Самостоятельная работа обучающегося (всего)</b>	
Промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачета в 1 семестре	
Промежуточная аттестация в форме экзамена во 2 семестре	<b>6</b>

По дисциплине предусмотрено 2 часа консультаций.

## 2.2. Тематический план и содержание дисциплины

	Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала, лабораторные и практические работы, самостоятельная работа обучающихся	Объем часов	Активные и интерактивные формы проведения занятий	Уровень освоения
<b>1 семестр</b>					
1	Введение	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с ролью математики в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности. Ознакомление с целями и задачами изучения математики при освоении специальностей СПО	2	Групповая дискуссия	1
<b>Раздел 1. Алгебра</b>			<b>102</b>		
2	Тема 1.1. Целые и рациональные числа	<b>Содержание учебного материала.</b> Множество натуральных, целых и рациональных числа. Понятие бесконечной десятичной периодической дроби. Алгоритм записи бесконечной периодической десятичной дроби в виде обыкновенной.	2	Групповая дискуссия	1
3	Тема 1.2. Действительные числа	<b>Содержание учебного материала.</b> Множество иррациональных и действительных чисел. Приближенные вычисления. Модуль действительного числа.	2	Групповая дискуссия	1
4	Тема 1.3. Выполнение арифметических действий над числами	<b>Содержание учебного материала.</b> Выполнение арифметических действий над числами, сочетая устные и письменные приемы.	2	Групповая дискуссия	1
5	Тема 1.4. Приближенные вычисления. Погрешность в преобразованиях и вычислениях.	<b>Содержание учебного материала.</b> Нахождение приближенных значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной); сравнение числовых выражений. Стандартная запись числа	2	Групповая дискуссия	1
6	Тема 1.5. Комплексные числа	<b>Содержание учебного материала.</b> Алгебраическая форма записи комплексного числа. Правила сложения и умножения комплексных чисел. Изображение комплексных чисел.	2	Групповая дискуссия	1
7	Тема 1.6. Комплексные числа	<b>Практическое занятие</b> Выполнение действий над комплексными числами. Изображение комплексных чисел.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
8	Тема 1.7 Тригонометрическая форма записи комплексного числа	<b>Содержание учебного материала.</b> Тригонометрическая форма записи комплексного числа.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
9	Тема 1.8 Тригонометрическая форма записи комплексного числа	<b>Практическое занятие</b> Выполнение действий над тригонометрической формой записи комплексного числа.	2	Разбор конкретных ситуаций	2

10	<b>Тема 1.9.</b> <b>Изображение комплексного числа на координатной плоскости. Формула Муавра.</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изображение комплексных чисел. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра	2	Разбор конкретных ситуаций	2
11	<b>Тема 1.10.</b> <b>Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач</b>	<b>Практическое занятие</b> Выполнение действий над комплексными числами алгебраических и тригонометрических форм записи	2	Разбор конкретных ситуаций	2
12	<b>Тема 1.11.</b> <b>Степень с натуральным и целым показателем</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Повторение понятия степени с натуральным и целым показателем. Свойства степеней с целым показателем. Степенные зависимости и функции.	2	Разбор конкретных ситуаций	1
13	<b>Тема 1.12.</b> <b>Степень с натуральным и целым показателем</b>	<b>Практическое занятие</b> Повторение понятия степени с натуральным и целым показателем. Свойства степеней с целым показателем. Решение задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
14	<b>Тема 1.13.</b> <b>Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Повторение понятия геометрическая прогрессия, нахождение $n$ -ого члена геометрической прогрессии	2	Групповая дискуссия	1
15	<b>Тема 1.14.</b> <b>Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на нахождение $n$ -ого члена геометрической прогрессии	2	Групповая дискуссия	2
16	<b>Тема 1.15.</b> <b>Арифметический корень натуральной степени</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Корни натуральной степени из числа и их свойства.	2	Групповая дискуссия	1
17	<b>Тема 1.16.</b> <b>Вычисление корней натуральной степени</b>	<b>Практическое занятие</b> Вычисление корней натуральной степени из числа с применением свойств степеней.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
18	<b>Тема 1.17.</b> <b>Степени с рациональным и действительным показателем</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Степень с рациональным показателем. Свойства степеней с рациональным показателем. Степень с действительным показателем.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
19	<b>Тема 1.18.</b> <b>Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени</b>	<b>Практическое занятие</b> Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени, применяя свойства. Сравнение выражений со степенями.	2	Разбор конкретных ситуаций	1
20	<b>Тема 1.19.</b> <b>Степенная функция, ее свойства и график</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Построение графиков степенных функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	1
21	<b>Тема 1.20.</b> <b>Степенная функция, ее свойства и график</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на построение графиков степенных функций и на преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
22	<b>Тема 1.21.</b> <b>Взаимно обратные функции</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Построение графиков взаимно обратных функций. Выполнение преобразования графиков	2	Групповая дискуссия	1

23	<b>Тема 1.22. Взаимно обратные функции</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на построение графиков взаимно обратных функций.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
24	<b>Тема 1.23. Определение равносильности выражений с радикалами.</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение равносильности выражений с радикалами.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
25	<b>Тема 1.24. Определение равносильности выражений с радикалами.</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на определение равносильности выражений с радикалами.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
26	<b>Тема 1.25. Иррациональные уравнения</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение иррациональных уравнений	2	Разбор конкретных ситуаций	2
27	<b>Тема 1.26. Иррациональные уравнения</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение иррациональных уравнений	2	Разбор конкретных ситуаций	2
28	<b>Тема 1.27. Иррациональные неравенства</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение иррациональных неравенств.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
29	<b>Тема 1.28. Иррациональные неравенства</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение иррациональных неравенств.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
30	<b>Тема 1.29. Показательная функция, ее свойства и график.</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Построение графиков показательных функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
31	<b>Тема 1.30. Показательная функция, ее свойства и график.</b>	<b>Практическое занятие</b> Построение графиков показательных функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
32	<b>Тема 1.31. Решение показательных уравнений</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение показательных уравнений.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
33	<b>Тема 1.32. Решение показательных уравнений</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение показательных уравнений.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
34	<b>Тема 1.33. Показательные неравенства</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение показательных неравенств.	2	Групповая дискуссия	1
35	<b>Тема 1.34. Показательные неравенства</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение показательных неравенств.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
36	<b>Тема 1.35. Системы показательных уравнений и неравенств</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение систем показательных уравнений и неравенств.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
37	<b>Тема 1.36. Решение прикладных задач на</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение прикладных задач на сложные проценты	2	Разбор конкретных	2

	<b>сложные проценты</b>			ситуаций	
38	<b>Тема 1.37. Определение логарифма</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество.	2	Групповая дискуссия	1
39	<b>Тема 1.38. Определение логарифма</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение примеров на вычисление логарифмов	2	Разбор конкретных ситуаций	2
40	<b>Тема 1.39. Свойства логарифмов</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Свойства логарифмов. Выполнение преобразований выражений, применение формул, связанных со свойствами логарифмов.	2	Групповая дискуссия	1
41	<b>Тема 1.40. Свойства логарифмов</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение свойства логарифмов. Выполнение преобразований выражений, применение формул, связанных со свойствами логарифмов.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
42	<b>Тема 1.41. Десятичные и натуральные логарифмы</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.	2	Разбор конкретных ситуаций	1
43	<b>Тема 1.42. Десятичные и натуральные логарифмы</b>	<b>Практическое занятие</b> Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
44	<b>Тема 1.43. Логарифмическая функция, ее свойства и график</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Построение графиков логарифмических функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
45	<b>Тема 1.44. Логарифмическая функция, ее свойства и график</b>	<b>Практическое занятие</b> Построение графиков логарифмических функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
46	<b>Тема 1.45. Логарифмические уравнения</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение области допустимых значений логарифмического выражения. Решение логарифмических уравнений	2	Групповая дискуссия	1
47	<b>Тема 1.46. Равносильные переходы в решении логарифмических уравнениях</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на использования равносильных переходов при решении уравнений	2	Разбор конкретных ситуаций	2
48	<b>Тема 1.47. Основные методы решения логарифмических уравнений</b>	<b>Практическое занятие</b> Разбор основных методов решения логарифмических уравнений.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
49	<b>Тема 1.48. Решение уравнений графическим методом</b>	<b>Практическое занятие</b> Построение графиков тригонометрических функций. Выполнение преобразования графиков	2	Разбор конкретных ситуаций	2
50	<b>Тема 1.49. Логарифмические неравенства</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение логарифмических неравенств.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
51	<b>Тема 1.50. Решение логарифмических уравнений и неравенств</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение логарифмических уравнений и неравенств	2	Разбор конкретных ситуаций	2
52	<b>Тема 1.51.</b>	<b>Практическое занятие</b>	2	Тренинг	3

<b>Контрольная работа №1.</b>		Контрольная работа №1.			
<b>Раздел 2. Основы тригонометрии</b>			<b>58</b>		
<b>53</b>	<b>Тема 2.1. Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изучение радианного метода измерения углов вращения и их связи с градусной мерой. Изображение углов вращения на окружности, соотнесение величины угла с его расположением.	2	Групповая дискуссия	1
<b>55</b>	<b>Тема 2.3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Формулирование определений тригонометрических функций для углов поворота и острых углов прямоугольного треугольника и объяснение их взаимосвязи. Знаки синуса, косинуса и тангенса	2	Групповая дискуссия	1
<b>56</b>	<b>Тема 2.3. Определение синуса, косинуса и тангенса угла</b>	<b>Практическое занятие.</b> Решение задач на нахождение синуса косинуса и тангенса углов.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>57</b>	<b>Тема 2.4. Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Зависимость между синусом и косинусом. Основное тригонометрическое тождество. Зависимость между тангенсом и котангенсом. Зависимость между тангенсом и косинусом.	2	Групповая дискуссия	1
<b>58</b>	<b>Тема 2.5. Применение основных тригонометрических тождеств</b>	<b>Практическое занятие.</b> Применение основных тригонометрических тождеств для вычисления значений тригонометрических функций по одной из них. Синус, косинус и тангенс углов $\alpha$ и $-\alpha$ .	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>59</b>	<b>Тема 2.6 Формулы сложения</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изучение формул сложения для синуса, косинуса и тангенса различных углов.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>60</b>	<b>Тема 2.7 Формулы сложения</b>	<b>Практическое занятие.</b> Применение формул сложения для синуса, косинуса и тангенса различных углов при решении задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>61</b>	<b>Тема 2.8. Синус, косинус и тангенс двойного угла</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изучение формул двойного угла для синуса, косинуса и тангенса и их применение при решении задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>62</b>	<b>Тема 2.9. Применение формул двойного и половинного углов.</b>	<b>Практическое занятие</b> Изучение формул половинного угла для синуса, косинуса и тангенса и их применение при решении задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>63</b>	<b>Тема 2.10. Формулы приведения</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление со свойствами симметрии точек на единичной окружности и применение их для вывода формул приведения	2	Разбор конкретных ситуаций	1
<b>64</b>	<b>Тема 2.11. Формулы приведения</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение формул приведения при решении задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>65</b>	<b>Тема 2.12. Сумма и разность синусов и косинусов</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Формулы суммы и разности синусов и косинусов и их применение при упрощении тригонометрических выражений	2	Разбор конкретных ситуаций	1
<b>66</b>	<b>Тема 2.12.</b>	<b>Практическое занятие</b>	2	Разбор	2

	<b>Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений</b>	Преобразование тригонометрических выражений с применением основных тригонометрических формул.		конкретных ситуаций	
67	<b>Тема 2.13.</b> <b>Арккосинус. Решение уравнения <math>\cos(x) = a</math></b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение арккосинуса и его свойства. Формула для решения уравнений $\cos(x)=a$	2	Групповая дискуссия	1
68	<b>Тема 2.14.</b> <b>Арккосинус. Решение уравнения <math>\cos(x) = a</math></b>	<b>Практическое занятие</b> Решения уравнений $\cos(x)=a$	2	Разбор конкретных ситуаций	2
69	<b>Тема 2.15.</b> <b>Арксинус. Решение уравнений <math>\sin(x)=a</math></b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение арксинуса и его свойства. Формула для решения уравнений $\sin(x)=a$	2	Групповая дискуссия	1
70	<b>Тема 2.16.</b> <b>Арксинус. Решение уравнений <math>\sin(x)=a</math></b>	<b>Практическое занятие</b> Решения уравнений $\sin(x)=a$	2	Разбор конкретных ситуаций	2
71	<b>Тема 2.17.</b> <b>Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений <math>\operatorname{tg}(x)=a</math> и <math>\operatorname{ctg}(x)=a</math></b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение арктангенса и арккотангенса и их свойства. Формула для решения уравнений $\operatorname{tg}(x)=a$ и $\operatorname{ctg}(x)=a$ .	2	Групповая дискуссия	1
72	<b>Тема 2.18.</b> <b>Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений <math>\operatorname{tg}(x)=a</math> и <math>\operatorname{ctg}(x)=a</math></b>	<b>Практическое занятие</b> Решения уравнений $\operatorname{tg}(x)=a$ и $\operatorname{ctg}(x)=a$ .	2	Разбор конкретных ситуаций	2
73	<b>Тема 2.19.</b> <b>Решение тригонометрических уравнений</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Решение простейших тригонометрических уравнений с применением всех изученных формул.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
74	<b>Тема 2.20.</b> <b>Решение тригонометрических уравнений</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение простейших тригонометрических уравнений с применением всех изученных формул.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
75	<b>Тема 2.21.</b> <b>Однородные тригонометрические уравнения</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени и алгоритм их решения.	2	Групповая дискуссия	1
76	<b>Тема 2.22.</b> <b>Однородные тригонометрические уравнения</b>	<b>Практическое занятие</b> Однородные тригонометрические уравнения первой и второй степени и алгоритм их решения.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
77	<b>Тема 2.23.</b> <b>Решение тригонометрических неравенств</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Примеры решения простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности	2	Разбор конкретных ситуаций	2
78	<b>Тема 2.24.</b> <b>Контрольная работа №2.</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №2.	2	Тренинг	3
79	<b>Тема 2.25.</b> <b>Подготовка к дифференцированному зачету.</b>	<b>Практическое занятие</b> Подготовка к дифференцированному зачету	2	Разбор конкретных ситуаций	2
80	<b>Дифференцированный зачет</b>	Дифференцированный зачет. Подведение итогов за семестр	2	Тренинг	3

<b>2 семестр</b>					
	<b>Раздел 3. Функции, их свойства и графики</b>			<b>14</b>	
<b>81</b>	<b>Тема 3.1. Определение числовой функции и способы ее задания</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с понятием переменной, примерами зависимостей между переменными. Ознакомление с понятием графика, определение принадлежности точки графику функции. Определение по формуле простейшей зависимости, вида ее графика. Выражение по формуле одной переменной через другие. Ознакомление с определением функции, формулирование его.	2	Групповая дискуссия	1
<b>82</b>	<b>Тема 3.2 Свойства функций</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение возрастающей и убывающей, ограниченной сверху (снизу) функции. Наименьшее и наибольшее значения функции. Четность и нечетность функций. Алгоритм исследования функции на четность.	2	Групповая дискуссия	1
<b>83</b>	<b>Тема 3.3. Изучение понятия обратной функции</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изучение <i>понятия обратной функции</i> , определение вида и <i>построение графика обратной функции, нахождение ее области определения и области значений.</i>	2	Групповая дискуссия	1
<b>84</b>	<b>Тема 3.4. Исследование функции</b>	<b>Практическое занятие</b> Схема исследования функции. Составление видов функций по данному условию, решение задач на экстремум. Выполнение преобразований графика функции	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>85</b>	<b>Тема 3.5. Преобразования функций и действия над ними</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Уменьшение области определения функции. Арифметические операции над функциями. Построение сложной функции.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
<b>86</b>	<b>Тема 3.6. Степенные, показательные и логарифмические функции</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Вычисление значений функций по значению аргумента. Определение положения точки на графике по ее координатам и наоборот. Использование свойств функций для сравнения значений степеней и логарифмов. Построение графиков степенных, показательных и логарифмических функций.	2	Разбор конкретных ситуаций	1
<b>87</b>	<b>Тема 3.7. Контрольная работа №3</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №3.	2	Тренинг	3
	<b>Раздел 4. Комбинаторика</b>			<b>14</b>	
<b>88</b>	<b>Тема 4.1. Изучение правила комбинаторики. Правило произведения</b>	Содержание учебного материала. Изучение правила комбинаторики и применение при решении комбинаторных задач.	2	Групповая дискуссия	1
<b>89</b>	<b>Тема 4.2. Размещения, сочетания, перестановки</b>	<b>Практическое занятие</b> Ознакомление с понятиями комбинаторики: размещениями, сочетаниями, перестановками и формулами для их вычисления.	2	Групповая дискуссия	1
<b>90</b>	<b>Тема 4.3. Решение практических задач с</b>	<b>Практическое занятие</b> Объяснение и применение формул для вычисления размещений,	2	Разбор конкретных	2

	<b>использованием правил перестановки и размещения комбинаторики</b>	перестановок и сочетаний при решении задач. Решение практических задач с использованием понятий и правил комбинаторики		ситуаций	
91	<b>Тема 4.4. Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания	2	Разбор конкретных ситуаций	2
92	<b>Тема 4.5. Бином Ньютона</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с биномом Ньютона и треугольником Паскаля. Решение задач на разложение бинома.	2	Групповая дискуссия	1
93	<b>Тема 4.6. Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля.</b>	<b>Практическое занятие</b> Повторение пройденного материала за семестр	2	Разбор конкретных ситуаций	2
94	<b>Тема 4.7 Контрольная работа № 4</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №4.	2	Тренинг	3
	<b>Раздел 5. Элементы теории вероятностей и статистики</b>		<b>14/1</b>		
95	<b>Тема 5.1. События. Вероятность события. Сложение вероятностей</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение случайного, достоверного и невозможного событий. Сумма, произведение событий. Равное и противоположное событие. Классическое определение вероятности. Изучение теоремы о вероятности суммы несовместных событий и ее следствий. Вычисление вероятности нескольких событий.	2	Групповая дискуссия	1
96	<b>Тема 5.2. Независимые события. Умножение вероятностей.</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Изучение теоремы о вероятности умножения независимых событий. Вычисление вероятности нескольких событий	2	Разбор конкретных ситуаций	2
97	<b>Тема 5.3. Решение задач с применением свойств вероятностей</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на вычисление вероятностей событий	2	Разбор конкретных ситуаций	2
98	<b>Тема 5.4. Случайные величины. Центральные тенденции случайной величины</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с понятием случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Гистограмма и полигон частот. Ознакомление с представлением числовых данных и их характеристиками: генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, мода, медиана. Понятие о задачах математической статистики.	2	Групповая дискуссия	1
99	<b>Тема 5.5. Меры разброса случайной величины</b>	<b>Практическое занятие</b> Меры разброса случайной величины: размах, отклонение от среднего, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
100	<b>Тема 5.6. Решение практических задач на обработку числовых данных</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение практических задач на обработку числовых данных, вычисление их характеристик.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		<b>Самостоятельная работа обучающихся</b> Решение задач. Подготовка к контрольной работе	1		

101	<b>Тема 5.7.</b> <b>Контрольная работа №5.</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №5.	2	Тренинг	3
<b>Раздел 6. Начала математического анализа</b>			<b>44/2</b>		
102	<b>Тема 6.1.</b> <b>Ознакомление с понятием числовой последовательности. Предел последовательности</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с понятием числовой последовательности, способами ее задания, вычислениями ее членов.	2	Групповая дискуссия	1
103	<b>Тема 6.2.</b> <b>Вычисление суммы бесконечного числового ряда</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с вычислением суммы бесконечного числового ряда на примере вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
104	<b>Тема 6.3.</b> <b>Арифметическая и геометрическая прогрессия.</b>	<b>Практическое занятие</b> <b>Нахождение <math>n</math>-ого члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых <math>n</math> членов.</b>	2	Разбор конкретных ситуаций	2
105	<b>Тема 6.4.</b> <b>Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на применение формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	2	Разбор конкретных ситуаций	2
106	<b>Тема 6.5.</b> <b>Понятие производной, ее механический смысл</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с понятием производной. Изучение и формулирование ее механического смысла. Изучение алгоритма вычисления производной на примере вычисления мгновенной скорости.	2	Групповая дискуссия	1
107	<b>Тема 6.6.</b> <b>Производная степенной функции. Правила дифференцирования</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Вывод формулы для вычисления производной степенной функции. Вычисление производной степенной функции. Производная от суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции	2	Групповая дискуссия	1
108	<b>Тема 6.7.</b> <b>Производные элементарных функций</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Усвоение правил дифференцирования, таблицы производных элементарных функций.	2	Групповая дискуссия	1
109	<b>Тема 6.8.</b> <b>Применение таблицы производных элементарных функций</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение таблицы производных элементарных функций и правил дифференцирования для нахождения производных функций.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
110	<b>Тема 6.9.</b> <b>Геометрический смысл производной</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с понятием углового коэффициента прямой. Введение понятия касательной к графику функции. Геометрический смысл производной. Формула для составления уравнения касательной к графику функции в точке $x_0$ .	2	Групповая дискуссия	1
111	<b>Тема 6.10.</b> <b>Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций. Теорема Лагранжа.	2	Групповая дискуссия	1
112	<b>Тема 6.11.</b> <b>Производная и экстремумы функции</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Необходимое условие существования экстремума – теорема Ферма. Достаточное условие существования экстремума.	2	Разбор конкретных ситуаций	2

113	<b>Тема 6.12.</b> <b>Проведение с помощью производной исследования функции</b>	<b>Практическое занятие</b> Проведение с помощью производной исследования функции, заданной формулой. Установление связи свойств функции и производной по их графикам.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
114	<b>Тема 6.13.</b> <b>Вторая производная функций</b>	<b>Практическое занятие</b> Нахождение второй производной.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
115	<b>Тема 6.14.</b> <b>Выпуклость графика функции, точки перегиба</b>	<b>Практическое занятие</b> Понятие производной второго порядка. Выпуклость функции. Точки перегиба.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
116	<b>Тема 6.15.</b> <b>Применение производной к построению графиков функций</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение производной к построению графиков функций	2	Разбор конкретных ситуаций	2
117	<b>Тема 6.16.</b> <b>Контрольная работа №6</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №6	2	Тренинг	3
118	<b>Тема 6.17.</b> <b>Понятие первообразной функции</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Понятие первообразной. Связь между производной функции и ее первообразной.	2	Групповая дискуссия	1
119	<b>Тема 6.18.</b> <b>Правила нахождения первообразных</b>	<b>Практическое занятие</b> Операция интегрирования. Таблица первообразных элементарных функций	2	Групповая дискуссия	1
120	<b>Тема 6.19.</b> <b>Решение задач на связь первообразной и ее производной</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на связь первообразной и ее производной.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
121	<b>Тема 6.20.</b> <b>Площадь криволинейной трапеции и интеграл. Вычисление интегралов</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение криволинейной трапеции. Определение интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	2	Разбор конкретных ситуаций	2
122	<b>Тема 6.21.</b> <b>Применение интеграла для вычисления площадей</b>	<b>Практическое занятие</b> Решение задач на применение интеграла для вычисления площадей.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		<b>Самостоятельная работа обучающихся</b> Решение задач. Подготовка к контрольной работе	2		
123	<b>Тема 6.22.</b> <b>Контрольная работа №7</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №7	2	Тренинг	3
<b>Раздел 7. Уравнения и неравенства</b>			<b>20/2</b>		
124	<b>Тема 7.1.</b> <b>Ознакомление с простейшими сведениями о корнях алгебраических уравнений</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Ознакомление с простейшими сведениями о корнях алгебраических уравнений, понятиями исследования уравнений и систем уравнений.	2	Групповая дискуссия	1
125	<b>Тема 7.2.</b> <b>Общие методы решения уравнений</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Метод замены переменной. Исключение возможной потери корней.	2	Разбор конкретных ситуаций	2

126	Тема 7.3. Метод разложения на множители	<b>Практическое занятие</b> Суть метода разложения на множители. Решение рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений данным методом	2	Разбор конкретных ситуаций	2
127	Тема 7.4. Метод введения новой переменной для решения уравнений	<b>Практическое занятие</b> Суть метода введения новой переменной. Решение рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений данным методом	2	Разбор конкретных ситуаций	2
128	Тема 7.5. Функционально-графический метод	<b>Содержание учебного материала.</b> Суть функционально-графического метода. Решение рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений данным методом	2	Групповая дискуссия	1
129	Тема 7.6. Решение неравенств с одной переменной. Метод интервалов.	<b>Практическое занятие</b> Равносильность неравенств. Система и совокупность неравенств. Иррациональные неравенства. Неравенства с модулем.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
130	Тема 7.7. Система уравнений. Метод подстановки	<b>Практическое занятие</b> Суть метода подстановки. Решение систем уравнений методом подстановки	2	Разбор конкретных ситуаций	2
131	Тема 7.8. Система уравнений. Метод алгебраического сложения	<b>Практическое занятие</b> Суть метода алгебраического сложения. Решение систем методом алгебраического сложения	2	Разбор конкретных ситуаций	2
132	Тема 7.9. Система уравнений. Метод введения новых переменных	<b>Практическое занятие</b> Суть метода введения новых переменных для систем. Решение систем методом введения новой переменной.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		<b>Самостоятельная работа обучающихся</b> Решение задач. Подготовка к контрольной работе	2		
133	Тема 7.10. Контрольная работа №8	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №8	2	Тренинг	3
<b>Геометрия</b>					
<b>Раздел 8. Прямые и плоскости в пространстве</b>			<b>22/2</b>		
134	Тема 8.1. Предмет стереометрии, аксиомы стереометрии	<b>Содержание учебного материала.</b> Геометрические тела и поверхности в стереометрии. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом.	2	Групповая дискуссия	1
135	Тема 8.2. Параллельность прямых, прямой и плоскости	<b>Содержание учебного материала.</b> Параллельность прямых в пространстве. Теорема о параллельных прямых. Параллельность прямой и плоскости.	2	Групповая дискуссия	1
136	Тема 8.3. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми	<b>Содержание учебного материала.</b> Скрещивающиеся прямые. Теорема о скрещивающихся прямых. Угол с сонаправленными сторонами.	2	Групповая дискуссия	2

		Угол между двумя прямыми.			
137	<b>Тема 8.4. Параллельность плоскостей</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Параллельные плоскости. Признак параллельности двух плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.	2	Групповая дискуссия	1
138	<b>Тема 8.5. Тетраэдр и параллелепипед</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Определение тетраэдра и его свойства. Определение параллелепипеда и его свойства. Задачи на построение сечений.	2	Групповая дискуссия	1
139	<b>Тема 8.6. Перпендикулярность прямой и плоскости</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости.	2	Групповая дискуссия	2
140	<b>Тема 8.7. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью.	2	Групповая дискуссия	2
141	<b>Тема 8.8. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей.	2	Групповая дискуссия	1
142	<b>Тема 8.9. Прямоугольный параллелепипед</b>	<b>Практическое занятие</b> Определение прямоугольного параллелепипеда. Свойства прямоугольного параллелепипеда. Решение задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		<b>Самостоятельная работа обучающихся</b> Решение задач. Подготовка к контрольной работе	2		
143	<b>Тема 8.11. Контрольная работа №9</b>	<b>Практическое занятие</b> Контрольная работа №9	2	Тренинг	3
<b>Раздел 9. Многогранники и круглые тела</b>			<b>26/2</b>		
144	<b>Тема 9.1. Понятие многогранника. Призма</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Понятие многогранника. Геометрическое тело. Призма. Площадь боковой поверхности призмы.	2	Групповая дискуссия	1
145	<b>Тема 9.2. Пирамида. Усеченная пирамида</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Понятие пирамиды. Правильная пирамида. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды. Усеченная пирамида и ее свойства. Площадь боковой и полной поверхности усеченной пирамиды.	2	Групповая дискуссия	1

146	Тема 9.3. Площадь поверхности призмы, пирамиды.	Практическое занятие Групповая дискуссия	2	Разбор конкретных ситуаций	2
147	Тема 9.4. Цилиндр	Содержание учебного материала. Понятие цилиндрической поверхности и цилиндра.	2	Групповая дискуссия	1
148	Тема 9.5. Площадь поверхности цилиндра	Практическое занятие Вывод формулы для нахождения площади боковой и полной поверхности цилиндра. Решение задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
149	Тема 9.6. Конус	Содержание учебного материала. Понятие конической поверхности и конуса. Усеченный конус.	2	Групповая дискуссия	1
150	Тема 9.7. Площадь боковой и полной поверхности конуса	Практическое занятие Понятие развертки конуса. Вывод формулы для вычисления боковой и полной поверхности конуса.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
151	Тема 9.8. Сфера и шар. Уравнение сферы	Содержание учебного материала. Понятие сферы и шара. Вывод уравнения сферы. Решение задач.	2	Групповая дискуссия	1
152	Тема 9.9. Взаимное расположение сферы и плоскости	Содержание учебного материала. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере. Площадь сферы.	2	Групповая дискуссия	1
153	Тема 9.10. Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, призмы	Содержание учебного материала. Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, призмы Решение задач.	2	Групповая дискуссия	1
154	Тема 9.11. Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара.	Практическое занятие Нахождение объема призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, шара.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
155	Тема 9.12. Решение задач с применением формул объема тел.	Практическое занятие Подготовка к контрольной работе.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		Самостоятельная работа обучающихся Решение задач. Подготовка к контрольной работе	2		
156	Тема 9.13. Контрольная работа №10	Практическое занятие Контрольная работа №10	2	Тренинг	3
	Раздел 10. Координаты и векторы		20/2		
157	Тема 10.1. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	Содержание учебного материала. Определение прямоугольной системы координат в пространстве. Координатные плоскости. Координаты вектора. Правила нахождения координат суммы, разности и произведения векторов.	2	Групповая дискуссия	1

158	<b>Тема 10.2.</b> <b>Простейшие задачи в координатах</b>	<b>Практическое занятие</b> Координаты середины отрезка. Вычисление длины вектора по его координатам. Расстояние между двумя точками.	1	Разбор конкретных ситуаций	2
159	<b>Тема 10.3.</b> <b>Скалярное произведение векторов</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Решение задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
160	<b>Тема 10.4.</b> <b>Угол между прямой и плоскостью</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Вычисление углов между прямыми и плоскостями.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
161	<b>Тема 10.5.</b> <b>Решение задач с помощью координат</b>	<b>Практическое занятие</b> Применение метода координат при нахождении углов, длин и расстояний.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
162	<b>Тема 10.6.</b> <b>Уравнение плоскости</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Вывод уравнения плоскости. Решение задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
163	<b>Тема 10.7.</b> <b>Движения. Центральная и осевая симметрии</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Понятие движения. Центральная симметрия. Осевая симметрия Решение задач	2	Разбор конкретных ситуаций	2
164	<b>Тема 10.8.</b> <b>Зеркальная симметрия. Параллельный перенос</b>	<b>Содержание учебного материала.</b> Зеркальная симметрия. Параллельный перенос. Решение задач	1	Разбор конкретных ситуаций	2
165	<b>Тема 10.9.</b> <b>Повторение изученного</b>	<b>Практическое занятие</b> Повторение изученного материала. Решение задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
166	<b>Тема 10.10.</b> <b>Повторение изученного</b>	<b>Практическое занятие</b> Повторение изученного материала. Решение задач.	2	Разбор конкретных ситуаций	2
		<b>Самостоятельная работа обучающихся</b> Решение задач. Подготовка к экзамену.	2		
		<b>Экзамен</b>	<b>6</b>		
		<b>Всего:</b>	<b>326/6</b>		

Для характеристики уровня освоения учебного материала используются следующие обозначения:

1. – ознакомительный (узнавание ранее изученных объектов, свойств);
2. – репродуктивный (выполнение деятельности по образцу, инструкции или под руководством);
3. – продуктивный (планирование и самостоятельное выполнение деятельности, решение проблемных задач).

Последовательное тематическое планирование содержания рабочей программы общеобразовательной учебной дисциплины, календарные объемы, виды занятий, формы организации самостоятельной работы также конкретизируются в календарно-тематическом плане (Приложение

№1)

### **3. ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ, ПРАКТИЧЕСКОГО ОПЫТА, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ**

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) – комплект методических и контрольных материалов, используемых при проведении текущего контроля освоения результатов обучения и промежуточной аттестации. (Приложение № 2).

### **4. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ДИСЦИПЛИНЫ**

#### **4.1. Требования к минимальному материально-техническому обеспечению**

Аудитория № 20. Учебная аудитория для проведения: лекционных, семинарских, практических занятий, уроков, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, курсового проектирования (выполнения курсовых работ)

Учебная мебель, доска.

Аудитория № 28. Читальный зал. Помещение для самостоятельной работы обучающихся.

Учебная мебель, компьютеры.

#### **4.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

##### **4.2.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

###### **Основная учебная литература:**

1. *Богомолов, Н. В.* Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449006>.

###### **Дополнительная учебная литература:**

1. *Шипачев, В. С.* Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 447 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-13405-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/511549>
2. *Богомолов, Н. В.* Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449038> .

**4.2.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<b>Перечень договоров ЭБС и БД</b>			
<b>Учебный год</b>	<b>№</b>	<b>Наименование документа с указанием реквизитов</b>	<b>Срок действия документа</b>
2023/2024	1	Договор на доступ к ЭБС ZNANIUM.COM между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Знаниум» № 1151-эбс от 11.07.2023	С 12.07.2023 по 11.07.2024
	2	Договор на доступ к ЭБС ZNANIUM.COM между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Знаниум» № 223/801 от 23.08.2023 (предоставление доступа к коллекции ЭФУ «Федеральный перечень учебников издательства «Провещение»	С 28.08.2023 по 31.12.2024
	3	Договор на доступ к ЭБС «ЭБС ЮРАЙТ» (полная коллекция) между УУНиТ в лице директора СФ УУНиТ и ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» № 1/23-эбс от 03.03.2023	С 04.03.2023 по 02.03.2024
	4	Договор на доступ к ЭБС «Университетская библиотека онлайн» между БашГУ и «Нексмедиа» № 223-950 от 05.09.2022	С 01.10.2022 по 30.09.2023
	5	Договор на доступ к ЭБС «Лань» между БашГУ и издательством «Лань» № 223-948 от 05.09.2022	С 01.10.2022 по 30.09.2023
	6	Договор на доступ к ЭБС «Лань» между БашГУ и издательством «Лань» № 223-949 от 05.09.2022	С 01.10.2022 по 30.09.2023
	7	Соглашение о сотрудничестве между БашГУ и издательством «Лань» № 5 от 05.09.2022	С 01.10.2022 по 30.09.2023
	8	ЭБС «ЭБ БашГУ», бессрочный договор между БашГУ и ООО «Открытые библиотечные системы» № 095 от 01.09.2014 г.	бессрочный
	9	Договор на доступ к электронным изданиям в составе базы данных «НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА eLIBRARY.RU» между УУНиТ и ООО НЭБ № SU- 20179 /2023 от 28.03.2023	С 28.03.2023 по 31.12.2023
	10	Договор на БД диссертаций между УУНиТ и РГБ № 223-997 от 11.07.2023	С 11.08.2023 по 10.08.2024
	11	Договор о подключении к НЭБ и о предоставлении доступа к объектам НЭБ между БашГУ в лице директора СФ БашГУ с ФГБУ «РГБ» № 101/НЭБ/1438-П от 11.06.2019	С 11.06.2019 по 10.06.2024

<b>№</b>	<b>Адрес (URL)</b>
1.	<a href="http://www.fcior.edu.ru">www.fcior.edu.ru</a> Информационные, тренировочные и контрольные материалы
2.	<a href="http://www.school-collection.edu.ru">www.school-collection.edu.ru</a> Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов

**4.2.3. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

<b>Наименование программного обеспечения</b>
Office Standart 2007 Russian OpenLicensePack NoLevel Acdmc

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Календарно-тематический план**

по дисциплине ПУД. 02 Математика

<b>38.02.06</b>	специальность Финансы
код	наименование специальности
	квалификация Финансист

Разработчик (составитель)  
И.Г.Аслаев преподаватель

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2023

**1 семестр**

<b>№ п/п</b>	<b>Наименование разделов и тем</b>	<b>Кол-во часов</b>	<b>Календарные сроки изучения (план)</b>	<b>Вид занятия</b>	<b>Домашнее задание</b>
1	Введение	2/2	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
<b>Раздел 1. Алгебра</b>					
2	Целые и рациональные числа	2/4	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
3	Действительные числа	2/6	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
4	Выполнение арифметических действий над числами	2/8	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
5	Приближенные вычисления. Погрешность в преобразованиях и вычислениях	2/10	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
6	Комплексные числа	2/12	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
7	Комплексные числа	2/14	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
8	Тригонометрическая форма записи комплексного числа	2/16	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
9	Тригонометрическая форма записи комплексного числа	2/18	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
10	Изображение комплексного числа на координатной плоскости. Формула Муавра.	2/20	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
11	Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач.	2/22	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
12	Степень с натуральным и целым показателем	2/24	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
13	Степень с натуральным и целым показателем	2/26	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
14	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	2/28	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
15	Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	2/30	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
16	Арифметический корень натуральной степени	2/32	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
17	Вычисление корней натуральной степени	2/34	Сентябрь	Практическое занятие	Решить задачи
18	Степени с рациональным и действительным показателем	2/36	Сентябрь	Лекция	Решить задачи
19	Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени	2/38	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
20	Степенная функция, ее свойства и график	2/40	Октябрь	Лекция	Решить задачи
21	Степенная функция, ее свойства и график	2/42	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
22	Взаимно обратные функции	2/44	Октябрь	Лекция	Решить задачи
23	Взаимно обратные функции	2/46	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
24	Определение равносильности выражений с радикалами.	2/48	Октябрь	Лекция	Решить задачи
25	Определение равносильности выражений с радикалами.	2/50	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи

26	Иррациональные уравнения	2/52	Октябрь	Лекция	Решить задачи
27	Иррациональные уравнения	2/54	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
28	Иррациональные неравенства	2/56	Октябрь	Лекция	Решить задачи
29	Иррациональные неравенства	2/58	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
30	Показательная функция, ее свойства и график.	2/60	Октябрь	Лекция	Решить задачи
31	Показательная функция, ее свойства и график.	2/62	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
32	Решение показательных уравнений	2/64	Октябрь	Лекция	Решить задачи
33	Решение показательных уравнений	2/66	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
34	Показательные неравенства	2/68	Октябрь	Лекция	Решить задачи
35	Показательные неравенства	2/70	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
36	Системы показательных уравнений и неравенств	2/72	Октябрь	Лекция	Решить задачи
37	Решение прикладных задач на сложные проценты	2/74	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
38	Определение логарифма.	2/76	Октябрь	Лекция	Решить задачи
39	Определение логарифма.	2/78	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
40	Свойства логарифмов	2/80	Октябрь	Лекция	Решить задачи
41	Свойства логарифмов	2/82	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
42	Десятичные и натуральные логарифмы	2/84	Октябрь	Лекция	Решить задачи
43	Десятичные и натуральные логарифмы	2/86	Октябрь	Практическое занятие	Решить задачи
44	Логарифмическая функция, ее свойства и график	2/88	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
45	Логарифмическая функция, ее свойства и график	2/90	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
46	Логарифмические уравнения	2/92	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
47	Равносильные переходы в решении логарифмических уравнений	2/94	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
48	Основные методы решения логарифмических уравнений	2/96	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
49	Решение уравнений графическим методом	2/98	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
50	Логарифмические неравенства	2/100	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
51	Решение уравнений и неравенств.	2/102	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
52	Контрольная работа №1	2/104	Ноябрь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 2. Основы тригонометрии</b>					
53	Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат	2/106	Ноябрь	Лекция	Решить задачи

54	Радианная мера угла. Поворот точки вокруг начала координат	2/108	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
55	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2/110	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
56	Определение синуса, косинуса и тангенса угла	2/112	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
57	Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла	2/114	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
58	Применение основных тригонометрических тождеств	2/116	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
59	Формулы сложения	2/118	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
60	Формулы сложения	2/120	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
61	Синус, косинус и тангенс двойного и половинного углов	2/122	Ноябрь	Лекция	Решить задачи
62	Применение формул двойного и половинного углов.	2/124	Ноябрь	Практическое занятие	Решить задачи
63	Формулы приведения	2/126	Декабрь	Лекция	Решить задачи
64	Формулы приведения	2/128	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
65	Сумма и разность синусов и косинусов	2/130	Декабрь	Лекция	Решить задачи
66	Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений	2/132	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
67	Арккосинус. Решение уравнения $\cos(x) = a$	2/134	Декабрь	Лекция	Решить задачи
68	Арккосинус. Решение уравнения $\cos(x) = a$	2/136	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
69	Арсинус. Решение уравнений $\sin(x)=a$	2/138	Декабрь	Лекция	Решить задачи
70	Арсинус. Решение уравнений $\sin(x)=a$	2/140	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
71	Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg}(x)=a$ и $\operatorname{ctg}(x)=a$	2/142	Декабрь	Лекция	Решить задачи
72	Арктангенс и арккотангенс. Решение уравнений $\operatorname{tg}(x)=a$ и $\operatorname{ctg}(x)=a$	2/144	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
73	Решение тригонометрических уравнений	2/146	Декабрь	Лекция	Решить задачи
74	Решение тригонометрических уравнений	2/148	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
75	Однородные тригонометрические уравнения	2/150	Декабрь	Лекция	Решить задачи
76	Однородные тригонометрические уравнения	2/152	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
77	Решение тригонометрических неравенств.	2/154	Декабрь	Лекция	Решить задачи
78	Контрольная работа №2	2/156	Декабрь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
79	Подготовка к дифференцированному зачету.	2/158	Декабрь	Практическое занятие	Повторение пройденного материала

80	Дифференцированный зачет	2/160	Декабрь	Практическое занятие	
<b>Всего часов</b>		<b>160</b>			
<b>2 семестр</b>					
№ п/п	Наименование разделов и тем	Кол-во часов	Календарные сроки изучения (план)	Вид занятия	Домашнее задание
<b>Раздел 3. Функции, их свойства и графики</b>					
81	Определение числовой функции и способы ее задания	2/162	Январь	Лекция	Решить задачи
82	Свойства функций	2/164	Январь	Лекция	Решить задачи
83	Изучение понятия обратной функции	2/166	Январь	Лекция	Решить задачи
84	Исследование функции	2/168	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
85	Преобразования функций и действия над ними	2/170	Январь	Лекция	Решить задачи
86	Степенные, показательные и логарифмические функции	2/172	Январь	Лекция	Решить задачи
87	Контрольная работа №3	2/174	Январь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 4. Комбинаторика</b>					
88	Изучение правила комбинаторики. Правило произведения	2/176	Декабрь	Лекция	Решить задачи
89	Размещения, сочетания, перестановки	2/178	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
90	Решение практических задач с использованием правил перестановки и размещения комбинаторики	2/180	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
91	Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания	2/182	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
92	Бином Ньютона	2/184	Декабрь	Лекция	Решить задачи
93	Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля.	2/186	Декабрь	Практическое занятие	Решить задачи
94	Контрольная работа №4	2/188	Декабрь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 5. Элементы теории вероятностей и статистики</b>					
95	События. Вероятность события. Сложение вероятностей	2/190	Январь	Лекция	Решить задачи
96	Независимые события. Умножение вероятностей.	2/192	Январь	Лекция	Решить задачи
97	Решение задач с применением свойств вероятностей	2/194	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
98	Случайные величины. Центральные тенденции случайной величины	2/196	Январь	Лекция	Решить задачи

99	Меры разброса случайной величины	2/198	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
100	Решение практических задач на обработку числовых данных	2/200	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
101	Контрольная работа №5	2/202	Январь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 6. Начала математического анализа</b>					
102	Ознакомление с понятием числовой последовательности. Предел последовательности	2/204	Январь	Лекция	Решить задачи
103	Вычисление суммы бесконечного числового ряда	2/206	Январь	Лекция	Решить задачи
104	Арифметическая и геометрическая прогрессия.	2/208	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
105	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	2/210	Январь	Практическое занятие	Решить задачи
106	Понятие производной, ее механический смысл	2/212	Февраль	Лекция	Решить задачи
107	Производная степенной функции. Правила дифференцирования	2/214	Февраль	Лекция	Решить задачи
108	Производные элементарных функций	2/216	Февраль	Лекция	Решить задачи
109	Применение таблицы производных элементарных функций	2/218	Февраль	Практическое занятие	Решить задачи
110	Геометрический смысл производной	2/220	Февраль	Лекция	Решить задачи
111	Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции	2/222	Февраль	Практическое занятие	Решить задачи
112	Производная и экстремумы функции	2/224	Февраль	Лекция	Решить задачи
113	Проведение с помощью производной исследования функции	2/226	Февраль	Практическое занятие	Решить задачи
114	Вторая производная функций	2/228	Февраль	Практическое занятие	Решить задачи
115	Выпуклость графика функции, точки перегиба	2/230	Февраль	Практическое занятие	Решить задачи
116	Применение производной к построению графиков функций	2/232	Март	Практическое занятие	Решить задачи
117	Контрольная работа №6	2/234	Март	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
118	Понятие первообразной функции	2/236	Март	Лекция	Решить задачи
	Правила нахождения первообразных функции	2/238	Март	Практическое	Решить задачи

119				занятие	
120	Решение задач на связь первообразной и ее производной	2/240	Март	Практическое занятие	Решить задачи
121	Площадь криволинейной трапеции и интеграл. Вычисление интегралов	2/242	Март	Лекция	Решить задачи
122	Применение интеграла для вычисления площадей	2/244	Март	Практическое занятие	Решить задачи
123	Контрольная работа №7	2/246	Март	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 7. Уравнения и неравенства</b>					
124	Ознакомление с простейшими сведениями о корнях алгебраических уравнений	2/248	Март	Лекция	Решить задачи
125	Общие методы решения уравнений.	2/250	Апрель	Лекция	Решить задачи
126	Метод разложения на множители.	2/252	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
127	Метод введения новой переменной для решения уравнений.	2/254	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
128	Функционально-графический метод	2/256	Апрель	Лекция	Решить задачи
129	Решение неравенств с одной переменной. Метод интервалов	2/258	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
130	Системы уравнений. Метод подстановки	2/260	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
131	Системы уравнений. Метод алгебраического сложения.	2/262	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
132	Системы уравнений. Метод введения новых переменных	2/264	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
133	Контрольная работа №8	2/266	Апрель	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 8. Прямые и плоскости в пространстве</b>					
134	Предмет стереометрии, аксиомы стереометрии.	2/268	Апрель	Лекция	Решить задачи
135	Параллельность прямых, прямой и плоскости	2/270	Апрель	Лекция	Решить задачи
136	Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми	2/272	Апрель	Лекция	Решить задачи
137	Параллельность плоскостей	2/274	Апрель	Лекция	Решить задачи
138	Тетраэдр и параллелепипед	2/276	Апрель	Лекция	Решить задачи
139	Перпендикулярность прямой и плоскости	2/278	Апрель	Лекция	Решить задачи
140	Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью	2/280	Апрель	Лекция	Решить задачи
141	Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей	2/282	Апрель	Лекция	Решить задачи

142	Прямоугольный параллелепипед	2/284	Апрель	Практическое занятие	Решить задачи
143	Контрольная работа №9	2/286	Май	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 9. Многогранники и круглые тела</b>					
144	Понятие многогранника. Призма	2/288	Май	Лекция	Решить задачи
145	Пирамида. Усеченная пирамида	2/290	Май	Лекция	Решить задачи
146	Площадь поверхности призмы, пирамиды.	2/292	Май	Практическое занятие	Решить задачи
147	Цилиндр	2/294	Май	Лекция	Решить задачи
148	Площадь поверхности цилиндра	2/296	Май	Практическое занятие	Решить задачи
149	Конус	2/298	Май	Лекция	Решить задачи
150	Площадь боковой и полной поверхности конуса	2/300	Май	Практическое занятие	Решить задачи
151	Сфера и шар. Уравнение сферы	2/302	Май	Лекция	Решить задачи
152	Взаимное расположение сферы и плоскости	2/304	Май	Лекция	Решить задачи
153	Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда, призмы	2/306	Май	Лекция	Решить задачи
154	Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара»	2/308	Май	Практическое занятие	Решить задачи
155	Решение задач с применением формул объема тел.	2/310	Июнь	Практическое занятие	Решить задачи
156	Контрольная работа №10	2/312	Июнь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Раздел 10. Координаты и векторы</b>					
157	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора	2/314	Июнь	Лекция	Решить задачи
158	Простейшие задачи в координатах	2/316	Июнь	Практическое занятие	Решить задачи
159	Скалярное произведение векторов	2/318	Июнь	Лекция	Решить задачи
160	Угол между прямой и плоскостью	2/320	Июнь	Лекция	Решить задачи
161	Решение задач с помощью координат	2/322	Июнь	Практическое занятие	Решить задачи
162	Уравнение плоскости	2/324	Июнь	Лекция	Решить задачи
163	Движения. Центральная и осевая симметрии	2/326	Июнь	Лекция	Решить задачи
164	Зеркальная симметрия. Параллельный перенос	2/328	Июнь	Лекция	Решить задачи
165	Повторение изученного	2/330	Июнь	Практическое	Решить задачи

				занятие	
166	Повторение изученного	2/332	Июнь	Практическое занятие	Повторить пройденный материал
<b>Экзамен</b>					
<b>Всего часов</b>		<b>332</b>			

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Стерлитамакский филиал

Колледж

**Фонд оценочных средств**

по дисциплине

***ПУД. 02 Математика***

---

Общеобразовательный цикл, обязательная часть  
цикл дисциплины и его часть (обязательная, вариативная)

---

***38.02.06***

специальность  
Финансы

код

наименование специальности

квалификация  
Финансист

---

Разработчик (составитель)

И.Г.Аслаев преподаватель

---

ученая степень, ученое звание,  
категория, Ф.И.О.

Стерлитамак 2023

## **I Паспорт фондов оценочных средств**

### **1. Область применения**

**Фонд оценочных средств** (ФОС) предназначен для проверки результатов освоения дисциплины ПУД.02 Математика, входящей в состав программы подготовки специалистов среднего звена по специальности 38.02.06 Финансы (укрупнённая группа специальностей 38.00.00 Экономика и управление (уровень3)).

**Работа обучающихся во взаимодействии с преподавателем 332 часов**

### **2. Объекты оценивания – результаты освоения дисциплины**

ФОС позволяет оценить следующие результаты освоения дисциплины:

#### **Личностных:**

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к себе, к своему здоровью, к познанию себя:*

-готовность и способность обучающихся к отстаиванию личного достоинства, собственного мнения, готовность и способность вырабатывать собственную позицию по отношению к общественно-политическим событиям прошлого и настоящего на основе осознания и осмысления истории, духовных ценностей и достижений нашей страны;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к России как к Родине (Отечеству):*

-формирование уважения к русскому языку как государственному языку Российской Федерации, являющемуся основой российской идентичности и главным фактором национального самоопределения;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к закону, государству и к гражданскому обществу:*

-мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики, основанное на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся с окружающими людьми:*

-нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей, толерантного сознания и поведения в поликультурном мире, готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения;

-развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

*Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к окружающему миру, живой природе, художественной культуре:*

-готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

-эстетические отношения к миру, готовность к эстетическому обустройству собственного быта.

*Личностные результаты в сфере отношения обучающихся к труду, в сфере социально-экономических отношений:*

-осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;

-готовность обучающихся к трудовой профессиональной деятельности как к возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

-готовность к самообслуживанию, включая обучение и выполнение домашних обязанностей.

### **Метапредметных:**

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы представлены тремя группами универсальных учебных действий (УУД).

#### 1. Регулятивные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

-ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

#### 2. Познавательные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

-находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;

#### 3. Коммуникативные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

-развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств.

### **Предметных:**

В результате изучения учебного предмета «Математика» на уровне среднего общего образования обучающийся на углубленном уровне научится:

использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений; проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;

выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; записывать, сравнивать, округлять числовые данные реальных величин с использованием разных систем измерения; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;

составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств;

определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.); интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации; определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.);

решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты;

вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни; выбирать методы подходящего представления и обработки данных;

составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат;

владеть понятиями векторы и их координаты; уметь выполнять операции над

векторами; использовать скалярное произведение векторов при решении задач; применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач; применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач.

**Обучающийся на углубленном уровне получит возможность научиться:**

использовать теоретико-множественный язык и язык логики для описания реальных процессов и явлений, при решении задач других учебных предметов

свободно оперировать числовыми множествами при решении задач;

понимать причины и основные идеи расширения числовых множеств;

владеть основными понятиями теории делимости при решении стандартных задач

иметь базовые представления о множестве комплексных чисел;

свободно выполнять тождественные преобразования тригонометрических, логарифмических, степенных выражений;

владеть формулой бинома Ньютона;

уметь выполнять запись числа в позиционной системе счисления;

применять при решении задач Основную теорему алгебры;

применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования

свободно определять тип и выбирать метод решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

свободно решать системы линейных уравнений;

решать основные типы уравнений и неравенств с параметрами;

применять при решении задач неравенства Коши-Буняковского, Бернулли;

владеть понятием асимптоты и уметь его применять при решении задач;

применять методы решения простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков;

свободно владеть стандартным аппаратом математического анализа для вычисления производных функции одной переменной;

свободно применять аппарат математического анализа для исследования функций и построения графиков, в том числе исследования на выпуклость;

оперировать понятием первообразной функции для решения задач;

овладеть основными сведениями об интеграле Ньютона–Лейбница и его простейших применениях

оперировать в стандартных ситуациях производными высших порядков;

уметь применять при решении задач свойства непрерывных функций;

уметь применять приложение производной и определенного интеграла к решению задач естествознания;

владеть понятиями вторая производная, выпуклость графика функции и уметь исследовать функцию на выпуклость

иметь представление о центральной предельной теореме

иметь представление о выборочном коэффициенте корреляции и линейной регрессии;

иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;

иметь представление о связи эмпирических и теоретических распределений

иметь представление о статистических гипотезах и проверке статистической гипотезы, о статистике критерия и ее уровне значимости;

иметь представление об аксиоматическом методе;

уметь применять для решения задач свойства плоских и двугранных углов, трехгранного угла, теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла;

владеть понятием перпендикулярное сечение призмы и уметь применять его при решении задач;

иметь представление о двойственности правильных многогранников;

иметь представление об аксиомах объема, применять формулы объемов прямоугольного параллелепипеда, призмы и пирамиды, тетраэдра при решении задач;  
иметь представление о движениях в пространстве: параллельном переносе, симметрии относительно плоскости, центральной симметрии, повороте относительно прямой, винтовой симметрии, уметь применять их при решении задач;  
уметь применять формулы объемов при решении задач;  
находить объем параллелепипеда и тетраэдра, заданных координатами своих вершин;  
- задавать прямую в пространстве;  
находить расстояние от точки до плоскости в системе координат;  
находить расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в системе координат.

### **3 Формы контроля и оценки результатов освоения дисциплины**

Контроль и оценка результатов освоения – это выявление, измерение и оценивание результатов освоения дисциплины.

В соответствии с учебным планом специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, рабочей программой общеобразовательной учебной дисциплины Математика предусматривается текущий и промежуточный контроль результатов освоения.

#### **3.1 Формы текущего контроля**

Текущий контроль успеваемости представляет собой проверку усвоения учебного материала, регулярно осуществляемую на протяжении курса обучения.

Текущий контроль результатов освоения дисциплины в соответствии с рабочей программой и календарно-тематическим планом происходит при использовании следующих обязательных форм контроля:

- выполнение и защита практических работ,
- проверка выполнения самостоятельной работы студентов,
- проверка выполнения контрольных работ.

Во время проведения учебных занятий дополнительно используются следующие формы текущего контроля – устный опрос, решение задач, тестирование по темам отдельных занятий.

**Выполнение и защита практических работ.** Практические работы проводятся с целью усвоения и закрепления результатов освоения дисциплины. В ходе практической работы обучающиеся учатся использовать формулы, и применять различные методики расчета, анализировать полученные результаты и делать выводы, опираясь на теоретические знания.

Список практических работ:

Практическая работа №1 «Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач»

Практическая работа №2 «Вычисление корней натуральной степени»

Практическая работа №3 «Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени»

Практическая работа №4 «Решение прикладных задач на сложные проценты»

Практическая работа №5 «Решение уравнений графическим методом»

Практическая работа №6 «Подготовка к контрольной работе.»

Практическая работа №7 «Применение основных тригонометрических тождеств»

Практическая работа №8 «Применение формул двойного и половинного углов»

Практическая работа №9 «Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений»

- Практическая работа №10 «Подготовка к дифференцированному зачету.»
- Практическая работа №11 «Функциональные зависимости в реальных процессах»
- Практическая работа №12 «Исследование функции»
- Практическая работа №13 «Размещения, сочетания, перестановки»
- Практическая работа №14 «Решение практических задач с использованием правил перестановки и размещения комбинаторики»
- Практическая работа №15 «Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания»
- Практическая работа №16 «Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля»
- Практическая работа №17 «Решение задач с применением свойств вероятностей»
- Практическая работа №18 «Меры разброса случайной величины»
- Практическая работа №19 «Решение практических задач на обработку числовых данных»
- Практическая работа №20 «Арифметическая и геометрическая прогрессия»
- Практическая работа №21 «Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии»
- Практическая работа №22 «Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера»
- Практическая работа №23 «Применение таблицы производных элементарных функций»
- Практическая работа №24 «Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции»
- Практическая работа №25 «Проведение с помощью производной исследования функции»
- Практическая работа №26 «Наибольшее и наименьшее значение функции»
- Практическая работа №27 «Вторая производная функций»
- Практическая работа №28 «Выпуклость графика функции, точки перегиба»
- Практическая работа №29 «Применение производной к построению графиков функций»
- Практическая работа №30 «Использование геометрического и физического смысла производной для решения задач»
- Практическая работа №31 «Правила нахождения первообразных»
- Практическая работа №32 «Решение задач на связь первообразной и ее производной»
- Практическая работа №33 «Применение интеграла для вычисления площадей»
- Практическая работа №34 «Применение интеграла для вычисления физических величин!»
- Практическая работа №35 «Применение производной и интеграла к решению практических задач»
- Практическая работа №36 «Метод разложения на множители»
- Практическая работа №37 «Метод введения новой переменной для решения уравнений»
- Практическая работа №38 «Решение неравенств с одной переменной»
- Практическая работа №39 «Системы уравнений. Метод подстановки»
- Практическая работа №40 «Системы уравнений. Метод алгебраического сложения»
- Практическая работа №41 «Системы уравнений. Метод введения новых переменных»
- Практическая работа №42 «Применение определителя для решения системы линейных уравнений»
- Практическая работа №43 «Применение математических методов для решения содержательных задач»
- Практическая работа №44 «Прямоугольный параллелепипед»
- Практическая работа №45 «Решение стереометрических задач, связанных с перпендикулярностью прямых и плоскостей, используя планиметрические факты и методы»
- Практическая работа №46 «Площадь поверхности призмы, пирамиды»
- Практическая работа №47 «Площадь поверхности цилиндра»
- Практическая работа №48 «Площадь боковой и полной поверхности конуса»
- Практическая работа №49 «Вычисление площади поверхности тел вращения.»
- Практическая работа №50 «Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара»
- Практическая работа №51 «Комбинация многогранников и тел вращения.»
- Практическая работа №52 «Решение задач с применением формул объема тел.»
- Практическая работа №53 «Простейшие задачи в координатах»
- Практическая работа №54 «Решение задач с помощью координат»

**Практическая работа №1 «Применение комплексных чисел при решении физических и геометрических задач»**

№1. Выполните сложение и вычитание комплексных чисел: (3 балла)

1)  $z_1 = -3 + 5i, z_2 = 4 - 7i;$

2)  $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i, z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i;$

3)  $z_1 = -0,6 + 0,2i, z_2 = -0,4 - 0,5i;$

№ 2. (1 балл)

Выполните графически сложение чисел  $z_1 = -1 + 3i$  и  $z_2 = 4 + 5i$ .

№3. (4 балла)

Найдите произведение комплексных чисел:

1)  $z_1 = 2 - 3i, z_2 = -4 + i;$                       2)  $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i, z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i;$

3)  $z_1 = \sqrt{5}i, z_2 = 4\sqrt{5}i;$                       4)  $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 2i.$

№4. (3 балла)

Выполните действия:

1)  $\frac{1}{i};$             2)  $\frac{1}{1-i};$             3)  $\frac{3-2i}{1+3i}.$

№ 5. (2 балла)

Возвести в степень комплексные числа  $2i$  и  $\left(\frac{i}{2}\right)^8.$

№ 6. Решите квадратные уравнения: (3 балла)

а)  $x^2 - 2x + 2 = 0;$

б)  $4x^2 + 4x + 5 = 0;$

в)  $x^2 - 14x + 74 = 0.$

**Практическая работа №2 «Вычисление корней натуральной степени»**

1 вариант	2 вариант
<b>№1 Вычислить: 2 балла</b>	
а) $\sqrt[3]{-216}$ ;      б) $\sqrt[5]{32}$ ;	в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$ ;      г) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ .
<b>№2. Решите уравнение: 2 балла</b>	
а) $x^2=64$ ;      б) $x^4-81=0$ ;	в) $16x^4-1=0$ ;      г) $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$ .
<b>№3. Вычислить: 2 балла</b>	
а) $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$ ;      б) $\frac{\sqrt[3]{24}}{4\sqrt[3]{2}}$ ;	в) $\frac{5\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$ ;      г) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$ .
<b>№4. Упростите выражение: 2 балла</b>	
а) $\sqrt[4]{2^{14}q^{28}}$ ; б) $\sqrt[5]{11^5a^{10}}$ ; в) $\frac{\sqrt[3]{375n^2}}{\sqrt[3]{3n^{14}}}$ ;	г) $\sqrt[4]{8x^3y^5} \cdot \sqrt[4]{2xy^7}$ ; д) $\sqrt[5]{\frac{8c^2}{d}} : \sqrt[5]{\frac{d^9}{4c^3}}$ ; е) $\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}$ .
<b>№5. Вынесите множитель из-под знака корня. 2 балла</b>	
а) $\sqrt[3]{-128a^7}$ ;	б) $\sqrt[4]{6a^{12}a^6}$ .
<b>№6. Внесите множитель под знак корня. 2 балла</b>	
$2a \cdot \sqrt[4]{3a}, a > 0$	$2b \cdot \sqrt[5]{5b^2}, b > 0$

**Практическая работа №3 «Преобразование числовых и буквенных выражений, содержащих степени»**

Задание 1.

Представьте данное выражение в виде степени:  $y^{1,7} \cdot y^{2,8} \cdot y^{-1,5}$ .

Задание 2.

Упростите выражение:  $b^{-0,2} : b^{-0,7}$ .

Задание 3.

Упростите выражение:  $(a^{-1,5})^{\frac{2}{3}}$ .

Задание 4.

Сократите дробь:  $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$ .

Задание 5.

Найдите значение выражения:  $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$  при  $x = 0,0625$ .

Задание 6.

Упростите выражение  $\frac{1-y^{\frac{3}{2}}}{1+y^{\frac{1}{2}}+y} + 2\sqrt{y}$ .

Задание 7.

Упростите выражение  $\frac{a^{\frac{2}{3}}-16}{a^{\frac{1}{3}}-4} - a^{\frac{1}{3}}$ .

Задание 8.

Найдите значение выражения  $9^{3p} \cdot 3^{-\frac{1}{p}}$  при  $p = \frac{1}{2}$ .

*Задание 9.*

Найдите значение выражения  $3^{-6p} \cdot \frac{1}{3^{-4p}}$  при  $p = -2$ .

#### **Практическая работа №4 «Решение прикладных задач на сложные проценты»**

Существует формула для начисления сложного процента:

$$S=A*(1+R)^T$$

A- сумма вклада;

R- ставка процента;

T- количество периодов;

S- получаемая сумма.

Рассмотрим несколько задач, решаемых по этой формуле.

*Задание 1.*

Рассчитать сумму вклада через 3 года при сложной процентной ставке 10% годовых, если было вложено 100000 рублей.

*Задание 2.*

С какой процентной ставкой необходимо вложить деньги в банк, если через 2 года вкладчик хочет получить 120000 рублей при первоначальном взносе 100000 рублей?

*Задание 3.*

За 5 лет при сложной процентной ставке 7% годовых на счету у вкладчика стало 200000 рублей. Сколько денег он вложил в банк?

*Задание 4.*

Для обучения в колледже необходимо 120000 рублей. Родители Оксаны положили в банк 75000 рублей под 6% годовых (сложная процентная ставка). Будет ли у них необходимая сумма, если пока Оксана в первом классе (считать обучение в школе 9 лет)?

*Задание 5.*

Борис хочет вложить 50000 рублей на 5 лет, чтобы получить не меньше 70000 рублей. Один банк предлагает вложить деньги под 8% годовых, а другой - под 0,5% в месяц. Какому банку отдать предпочтение Борису?

*Задание 6.*

Какую сумму нужно вложить в банк, чтобы через 3 года на счету было 59550 рублей, если сложная процентная ставка банка равна 0,5% в месяц?

#### **Практическая работа №5 «Решение уравнений графическим методом»**

Алгоритм решения системы двух уравнений с двумя неизвестными графическим методом:

- 1) построить график первого уравнения;
- 2) построить график второго уравнения;
- 3) определить точки пересечения графиков (решением системы уравнений являются координаты каждой найденной точки).

**Пример:**

решить систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y - x = -3; \end{cases}$$

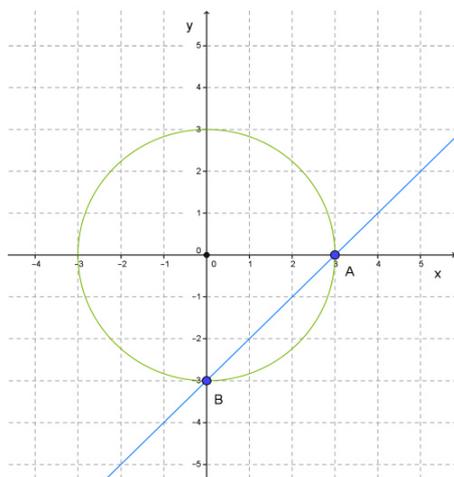
**Решение**

1. Начертим график первого уравнения  $x^2 + y^2 = 9$ .

Графиком уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

2. Начертим график второго уравнения  $y = x - 3$  (выразили  $y$ ).

Это прямая, для построения которой найдём две точки:  $(0; -3)$  и  $(3; 0)$ .



3. Окружность и прямая пересекаются в точках  $A$  и  $B$ .

Точка  $A$  имеет координаты  $(3; 0)$ , а точка  $B$  — координаты  $(0; -3)$ .

Пары чисел  $(3; 0)$  и  $(0; -3)$  являются решениями обоих уравнений системы, а значит, и решениями системы уравнений.

**Ответ:**  $(3; 0)$  и  $(0; -3)$ .

Графический способ решения систем уравнений. Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство. Графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. Например,

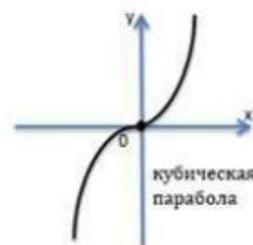
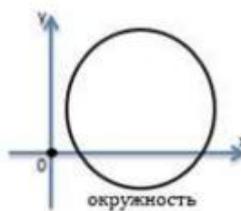
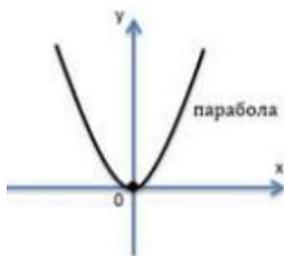
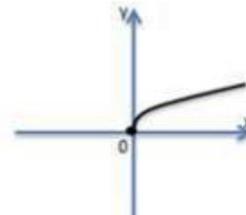
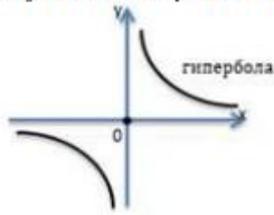
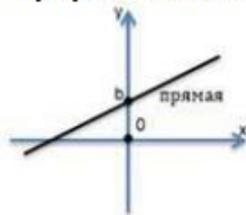
1.  $2x + 3y = 6$ ,  $y = -\frac{2}{3}x + 3$  - прямая

2.  $xy = 5$ ,  $y = \frac{5}{x}$  - гипербола

3.  $y = -x^2 + 2x + 2$  - парабола

4.  $x^2 + y^2 = 4$  - окружность, центр (0;0), радиус - 2

Графиками таких уравнений могут являться различные линии.



Решите систему двух уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} y + x - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

### Практическая работа №6 «Подготовка к контрольной работе.»

Задание 1

Вычислить:

1)  $\sqrt{(\sqrt{7} - 2\sqrt{10} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{5}}$ ;      2)  $\sqrt{(\sqrt{16} - 6\sqrt{7} + \sqrt{7}) \cdot 3}$ ;

3)  $\sqrt{(\sqrt{8} + 2\sqrt{15} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}) \cdot 2} + 7$ .

Задание 2

Вычислите:  $\frac{(0,216^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{5}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$ .

Задание 3.

Решить уравнения.

1)  $(x - 2)(x + 3) = 0$ ;      2)  $(x - 1)\sqrt{x + 4} = 0$ ;

3)  $\sqrt{(x - 2)(x + 8)} = 0$ ;      4)  $\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{2x + 7} = 0$ .

Задание 4.

Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения  $\sqrt{2x^2 - x - 5} + x = 1$ .

Задание 5.

Сколько корней имеет уравнение  $(x^2 - 9)(\sqrt{3 - 2x} - x) = 0$ .

Задание 6.

Решите уравнение  $\sqrt{49 + 9x|x + 4|} - 2x = 7$ .

Задание 7.

Найдите корень уравнения: 1)  $(\frac{1}{4})^{x-3} = 64$ ; 2)  $(\frac{1}{7})^{x-3} = 49$ .

Задание 8. Решите уравнение:  $\log_3(5x - 1) = 2$ .

Задание 9. Решите уравнение:  $\lg(x^2 - 2) = \lg x$ .

Задание 10 Решите уравнение  $\log_6(x - 9)^2 - 2 = 2\log_6(x - 2)$ ;

### Практическая работа №7 «Применение основных тригонометрических тождеств»

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Вспомним, что квадрат любого числа всегда больше или равен нулю и еще раз внимательно посмотрим на основное тригонометрическое тождество.

Замечаем, что  $\sin^2 \alpha \ll 1$  и  $\cos^2 \alpha \ll 1$

Откуда  $-1 \ll \sin \alpha \ll 1$  и  $-1 \ll \cos \alpha \ll 1$

Найдем  $\sin \beta$  и  $\cos \beta$ , заметим, что  $\sin \alpha = \cos \beta$ ;  $\cos \alpha = \sin \beta$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$

То есть в прямоугольном треугольнике синус одного острого угла равен косинусу другого (и наоборот).

Заметим, что зная косинус одного угла, можно найти синус (тангенс, котангенс). И наоборот.

$$\cos \alpha = +/\!-\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = +/\!-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

Знак +/- зависит от того, какой четверти принадлежит угол  $\alpha$ .

Задание 1

Отвечаем на вопрос, может ли синус произвольного угла равняться -2; 8; 1; 0,2; 1/8;  $\sqrt{3}/2$

Может ли косинус произвольного угла равняться -6; -0,6; 1/2; 1/14;  $\sqrt{5}/25$

Задание 2

Может ли синус и косинус одного и того же угла удовлетворять условиям (либо задание может звучать так – существует ли такой угол  $\alpha$ , что его синус и косинус равны соответственно)

$$1) \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем значение в основное тригонометрическое тождество, проверяем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad \text{Ответ: ДА(существует)}$$

$$2) \quad \sin \alpha = \frac{1}{4}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Подставляем значение в основное тригонометрическое тождество, проверяем

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$$

Ответ: НЕТ (такого угла  $\alpha$  не существует)

Задание 3

Найти множество значений функции  $y = 7 \cos \alpha - 3$

Вспоминаем

$$\begin{aligned}
-1 &\ll \cos \alpha \ll 1 \\
-7 &\ll 7\cos \alpha \ll 7 \\
-7 - 3 &\ll 7\cos \alpha - 3 \ll 7 - 3 \\
-10 &\ll y \ll 4 \\
\text{Ответ : } &-10 \ll y \ll 4
\end{aligned}$$

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение противолежащего катета к прилежащему

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника – отношение прилежащего катета к противолежащему

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Откуда  $\operatorname{tg} \alpha * \operatorname{ctg} \alpha = 1$ , либо, что тоже самое  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$

*Задание 4*

Чему равен тангенс, если котангенс равен -2; -7; 1/3; 15/2?

*Задание 5*

Может ли тангенс угла равняться -4; 6; -3; 0; 1000000?

*Задание 6*

Доказать тождество  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$   
 $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

### Практическая работа №8 «Применение формул двойного и половинного углов»

#### Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

*Задание 1*

Найти  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ , если  $5\pi < \alpha < \frac{11\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$

*Задание 2*

Найти  $\sin 2\alpha$ , если  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

*Задание 3*

Упростить выражение  $\frac{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

*Задание 4*

Доказать тождество  $\cos^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos 4\alpha$

*Задание 5*

Решить уравнение  $8\sin 2x \cos 2x = 4$ .

#### Формулы половинного аргумента

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

*Задание 1*

Вычислить  $\operatorname{tg} 15^\circ$  без помощи таблиц и микрокалькулятора

*Задание 2*

Выразить сумму  $S = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$  через  $\cos 4\alpha$

*Задание 3*

Выполнить понижение степени  $\sin^2 30^\circ$ ,  $\cos^2 27^\circ$ ,  $\operatorname{tg}^2 75^\circ$

*Задание 4*

Доказать тождество 
$$\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$$

*Задание 5*

Решить уравнение  $1 - 2 \sin^2 2x = 0$

**Практическая работа №9** «Применение основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений»

*Задание 1*

Упростить выражение  $A = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\cos \alpha + \sin \alpha}$

*Задание 2*

Упростить выражение  $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1}$

*Задание 3*

Упростить выражение  $\cos^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$

*Задание 4*

Упростить выражение  $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2(-\alpha) - \sin(-\alpha) \cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$

Задание 5

Упростить выражение  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

Задание 6

Упростить выражение  $S = \frac{\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)\cos^2 \alpha} - \frac{2(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha}$

Задание 7

Упростить выражение  $\frac{\cos \alpha}{2\sin^2 \alpha - 1} - \frac{\sin \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$

Задание 8

Упростить выражение и найти его числовое значение  $\frac{\sin(\alpha - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\alpha - \pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$  при

$$\alpha = \frac{5\pi}{4}.$$

### Практическая работа № 10 «Подготовка к дифференцированному зачету»

Задание 1. Вычислить

- 1)  $23,267 : 2,3 - 3,6 \cdot (17,2 \cdot 0,125 + 0,005 : 0,1) + 6,25 \cdot 3,2$ ;
- 2)  $9,25 \cdot 1,04 - (6,372 : 0,6 + 1,125 \cdot 0,8) : 1,2 + 0,16 \cdot 6,25$ .

Задание 2. Упростить

- 1)  $3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}}$ ;
- 2)  $\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ .

Задание 3. Вычислить

- 1)  $8^{\log_2 \frac{1}{3}}$ ; 2)  $\log_2 \frac{1}{32}$ ; 3)  $\log_{3\sqrt{2}} \frac{1}{18}$ ; 4)  $\frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} \log_3 9$

Задание 4. Решить уравнение

- 1)  $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$ ; 2)  $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$ ;
- 3)  $\log_2(2x - 18) + \log_2(x - 9) = 5$

Задание 5. Вычислите

- 1)  $\log_2\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$ ; 2)  $\log_3\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$

Задание 6. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

- 1)  $\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{9}$ ; 3)  $\frac{3\pi}{4}$ ; 4) 2; 5) 3; 6) 0,36

Задание 7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 300^\circ$ .

Задание 8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,6$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Задание 9. Найдите область определения функции  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 2}}{16 - x^2}$ .

Задание 10.

Банковская процентная ставка равна 12% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 56448 рублей.

Задание 11

Сколькими способами можно разместить 6 различных автомобилей в семи одноместных боксах?

### Практическая работа №11 «Функциональные зависимости в реальных процессах»

Ответить на вопросы:

1. Кто из ученых дал определение функции как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы?
2. Кто впервые стал употреблять слово "функция"?
3. Кто впервые дал явное определение функции?
4. Кто ввел обозначение функции символом  $f$ ?
5. Охарактеризуйте функциональные зависимости в музыке.
6. В чем заключается математический портрет пословиц? Приведите два конкретных примера.
7. Какие функциональные зависимости встречаются в биологии?
8. Какие функциональные зависимости встречаются в информатике?

### Практическая работа №12 «Исследование функции»

**Пример 1.** Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ .

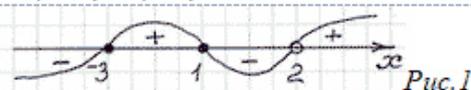
Решение:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}$$

1.  $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ;
2. Вертикальная асимптота  $x=2$ . Проверка: если  $x=2$ , то  $(x+3)(x-1) \neq 0$ .
3. Точки пересечения с осями координат: а)  $f(0) = \frac{(0+3)(0-1)}{0-2} = 1,5$ ; точка  $(0; 1,5)$ ;

б) $f(x)=0$ , тогда	$(x+3)(x-1)=0$ , $x=-3$ или $x=1$ , точки $(-3; 0)$ и $(1; 0)$
---------------------	---

4. Промежутки знакопостоянства:



5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

а)  $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$  - это симметрическое множество;

$$б) f(-x) = \frac{(-x+3)(-x-1)}{-x-2} = \frac{(3-x)(x+1)}{x+2}$$

так как  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то функция  $f$  не является ни четной, ни нечетной.

6. Степень числителя на единицу больше степени знаменателя, значит, существует наклонная асимптота. Выделим целую часть

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 3 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^2 - 2x} \phantom{- 3} \\ \phantom{x^2} - 4x - 3 \\ \underline{\phantom{x^2} 4x - 8} \\ \phantom{x^2} \phantom{4x} 5 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} = x + 4 + \frac{5}{x-2}$$

$$(x \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow \left(\frac{5}{x-2} \rightarrow 0\right) \Rightarrow f(x) \rightarrow x + 4 \Rightarrow (f(x) - (x+4)) \rightarrow 0,$$

значит, по определению  $y = x + 4$  - наклонная асимптота.

Так как  $f(x) = x+4 + \frac{5}{x-2}$ , где  $\frac{5}{x-2} \neq 0$ , значит, график не пересекает наклонную асимптоту.

7. Области существования графика:

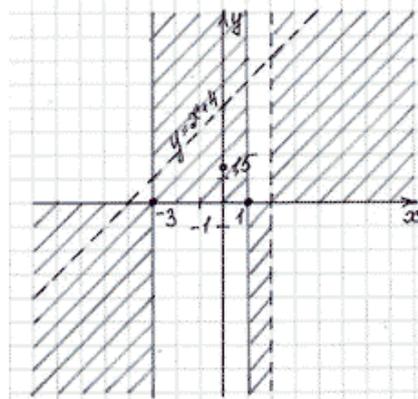


Рис.2

8.  $E(f): y = f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-2}$ . Пусть  $y$  – параметр, выясним возможность корней  $y$  параметрического уравнения

$$\begin{aligned} yx-2y &= x^2+2x-3 \\ x^2+(2-y)x+(2y-3) &= 0, \quad y \neq 0, \\ D &= (2-y)^2 - 4(2y-3) = 4-4y+y^2-8y+12 = y^2-12y+16 \geq 0 \\ y^2-12y+16 &= 0, \quad D = 36-16 = 20 \\ y &= 6 \pm \sqrt{20} = 6 \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

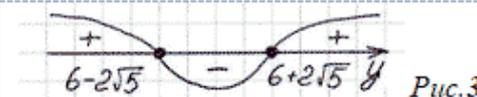


Рис.3

$$E(f) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty).$$

9. Так как  $E(f) = (-\infty; 6 - 2\sqrt{5}] \cup [6 + 2\sqrt{5}; +\infty) \Rightarrow y_1 = 6 - 2\sqrt{5}$  и  $y_2 = 6 + 2\sqrt{5}$  являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек

$$\text{для функции } g(x) = x^2 + (2-y)x + (2y-3) \quad x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(2-y)}{2} = \frac{y-2}{2},$$

$$\text{если } y_1 = 6 - 2\sqrt{5}, \text{ то } x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2(2 - \sqrt{5})}{2} = 2 - \sqrt{5},$$

$$\text{если } y_2 = 6 + 2\sqrt{5}, \text{ то } x_2 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{5})}{2} = 2 + \sqrt{5}.$$

Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума:  $x_{\min} = 2 + \sqrt{5}$ ,  $x_{\max} = 2 - \sqrt{5}$ ,

$$\min_{D(f)} f(x) = f(2 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}; \quad \max_{D(f)} f(x) = f(2 - \sqrt{5}) = 6 - 2\sqrt{5}.$$

10. Из эскиза графика следует, что функция  $f(x)$

возрастает в промежутках  $(-\infty; 2 - \sqrt{5}]$  и  $[2 + \sqrt{5}; +\infty)$ ;

убывает в промежутках  $[2 - \sqrt{5}; 2)$  и  $(2; 2 + \sqrt{5}]$ .

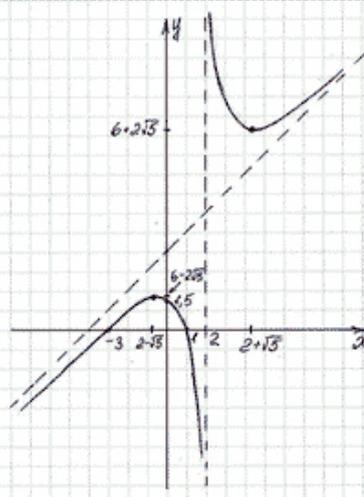
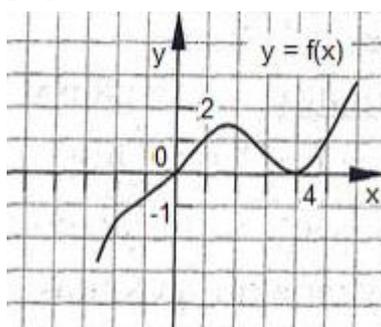
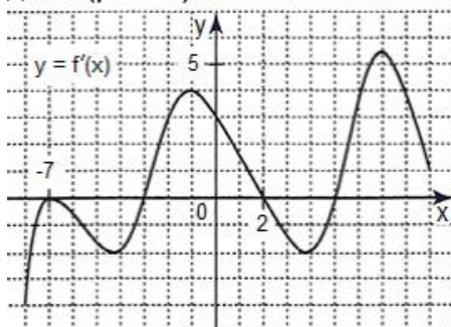


Рис.4

Задание 1. Исследуйте функцию по графику



Задание 2. Исследуйте функцию.

1)  $y = \sin 2x$ ; 2)  $f(x) = 5x^4 - 6x^2 - 3$

Задание 3. Найти интервалы монотонности функций: 1)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ ; 2)  $f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$ ;

### Практическая работа №13 «Размещения, сочетания, перестановки»

Задача 1.

Сколько четырехзначных «слов» можно составить из карточек **в, е, ч, н, о, с, т, ь**?

Задача 2.

Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

Задача 3.

Несколько строк в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех по цвету: белый, синий, красный, зеленый. Сколько всего стран могут использовать такую символику?

Задача 4.

Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторений цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

Задача 5.

Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое, 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют 10 команд?

Задача 6.

Сколькими способами можно делегировать троих студентов на международную конференцию из 9 членов научного общества?

### Практическая работа №14 «Решение практических задач с использованием правил перестановки и размещения комбинаторики»

Задача 1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду

должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Задача 6. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

### Практическая работа №15 «Решение практических задач с применением правил размещения и сочетания»

Задача 1.

В классе 25 учеников. Сколькими способами можно из них выбрать 4 учащихся для дежурства?

Задача 2.

Сколько вариантов трехзначного цифрового кода существует?

Задача 3.

В контексте 2 буквы белого цвета, 2 буквы синего цвета и 1 буква желтого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 буквы (порядок выбора не важен)?

Задача 4.

Сколькими способами можно составить букет из 7 цветов, если в вашем распоряжении 15 цветов?

Задача 5.

Сколькими способами можно составить список из 6 фильмов?

Задача 6.

На книжной полке выставлены 8 книг различных авторов. Сколько способов имеется для расстановки этих книг в различном порядке?

### Практическая работа №16 «Решение задач комбинаторики, применяя бином Ньютона и треугольник Паскаля»

1. Сколько членов разложения бинома  $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$  являются целыми числами?
2. Вычислить сумму  $C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + 2^3C_5^3 + 2^4C_5^4 + 2^5C_5^5$ .
3. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно  $x$ , получаемого в разложении бинома  $(3x - 4)^{17}$ .

### Практическая работа №17. «Решение задач с применением свойств вероятностей»

Задание 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Задание 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Задание 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Задание 4

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три

«пятерки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Задание 5

Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет: а) пять очков; б) не более четырёх очков; в) от 3 до 9 очков включительно.

Задание 6

В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что: а) они выйдут на разных этажах б) двое выйдут на одном этаже; в) все выйдут на одном этаже.

Задание 7

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

Задание 8

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали будут качественными; б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной; в) обе детали бракованные.

Задание 9

Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что он получит: а) пару десятков и пару валетов; б) флеш (5 карт одной масти); в) каре (4 карты одного номинала). Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

### Практическая работа №18 «Меры разброса случайной величины»

Задание 1 Найти моду, медиану и среднее значение выборки:

1. 13, 10, 15, 18, 21, 22, 10, 16, 10

2. 7, 8, 2, 5, 6, 9, 5, 6, 2, 1, 3, 8

3.

X	5	6	1	9	12
M	3	1	4	2	1

Задание 2. Найти среднее арифметическое и математическое ожидание значений случайной величины X:

X	11	10	15	14	16	12	20
M	2	5	6	1	3	2	1

Задание 3. Найти размах дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

а) 2, 5, 8, 4, 12, 6, 2, 8, 1

б) -10, -5, 0, 2, 5, 7, 8, 9, 11, 15

Задание 4. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

X	0	2	5	6	8	10
M	7	8	4	2	1	3

### Практическая работа №19. «Решение практических задач на обработку числовых данных»

Задание 1

Найдем математическое ожидание случайной величины X – числа стандартных деталей среди трех, отобранных из партии в 10 деталей, среди которых 2 бракованных. Составим ряд распределения для X. Из условия задачи следует, что X может принимать значения 1, 2, 3.

Задание 2

Задан закон распределения дискретной случайной величины X:

X	40	42	41	44
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Найдите: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратическое отклонение.

*Задание 3*

Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблично:

X	8	4	6	5
P	0,2	0,5	0,2	0,1

*Задание 4*

Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) дифференциальную функцию распределения f(x); 2) математическое ожидание M(x); 3) дисперсию D(x).

*Задание 5*

Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка 0,9, для второго станка – 0,8 и для третьего станка – 0,7. Найти вероятность того, что за этот час лишь один станок откажет в работе и потребует вмешательства рабочего.

*Задание 6*

Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено в пределах от 330 до 375.

*Задание 7*

Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблично:

X	8	4	6	5
P	0,2	0,5	0,2	0,1

**Практическая работа №20 «Арифметическая и геометрическая прогрессия»**

Задание 1. Дана арифметическая прогрессия  $a_n$  :  $a_1 = 10$ ,  $d = 4$ . Найти  $a_2$ ,  $a_4$

Задание 2. Найти суммы  $S_n$  для арифметических прогрессий  $a_n$ ,  $a_1 = 2$ ,  $d = 1$ ,  $n = 10$

Задание 3. Между числами 7 и 35 вставьте шесть таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Задание 4. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если:

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}; 2) \begin{cases} a_1 + a_5 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 60 \end{cases}$$

Задание 5. Дана арифметическая прогрессия:  $-10; -5; 0; 5 \dots$ ; известна сумма первых n членов  $S_n = 585$ . Найти n.

Задание 6. Дана геометрическая прогрессия  $b_n$  :  $b_1 = 2$ ,  $q = 2$ . Найти  $b_4$ ,  $b_6$ ,  $b_8$

Задание 7. Дана геометрическая прогрессия с положительными членами  $b_n$ . Найти  $b_5$ ,

$$\text{если } \begin{cases} b_4 - b_2 = 6 \\ b_1 + b_2 = 16 \end{cases}$$

Задание 8. Найти первые пять членов геометрической прогрессии  $b_n$  :  $b_1 = 4, q = 2$ .

**Практическая работа №21.** «Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии»

*Задание 1*

Представить в виде обыкновенной дроби число  $0,(\overline{6})$ .

*Задание 2*

Дана последовательность  $C_n = 5(-2)^n$ . Докажите, что эта последовательность является геометрической прогрессией.

*Задание 3*

Дана геометрическая прогрессия  $b_n = 2(-3)^n$ . Найдите пятый член прогрессии.

*Задание 4*

Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.

*Задание 5*

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии  $8; 2; 0,5; \dots$

*Задание 6*

Дана геометрическая прогрессия  $C_n$  с положительными членами, в которой  $C_4=24; C_6=96$ .

а) Найдите  $C_1$ . б) Определите количество членов прогрессии, начиная с первого, сумма которых равна 45.

*Задание 6*

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти  $b_1$ , если  $q = 1/3$

*Задание 7*

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии  $b_n$  в три раза больше ее первого члена. Найдите отношение  $b_2/b_4$ .

**Практическая работа №22** «Использование прогрессии для решения реальных задач прикладного характера»

**Задача о делении хлеба.** Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

**Решение:**

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член  $x$ , разность  $y$ . Тогда доля первого  $x$ , доля второго  $x + y$ , доля третьего  $x + 2y$ , доля четвертого  $x + 3y$ , доля пятого  $x + 4y$ .

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений система принимает вид

$$\begin{cases} x + 2y = 20, \\ 11x = 2y. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем:  $x = \frac{5}{3}, y = \frac{55}{6}$ . Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части  $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ .



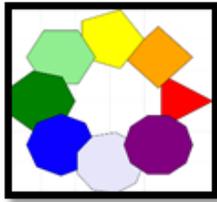
Уже в Древнем Египте знали не только арифметическую, но и геометрическую прогрессию. Вот, например, задача из папируса Райнда: «У семи лиц по семи кошек;

каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

**Решение:** числа 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649 представляют геометрическую прогрессию, первый член  $b_1 = 7$  и знаменатель прогрессии  $q = 7$ . Тогда, используя формулу  $n$ -го члена прогрессии  $b_n = b_1 q^{n-1}$ , находим  $b_6 = 7 \cdot 7^{6-1} = 7 \cdot 7^5 = 7^6 = 117649$ . По формуле суммы  $n$ -первых членов геометрической прогрессии:  $S_n = (b_1(q^n - 1))/(q - 1)$ , находим  $S_6 = \frac{7(7^6 - 1)}{7 - 1} = \frac{7((117649 - 1))}{6} = 137256$

## 2. Прогрессия в математике

**Задача № 1.** Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника, составляют прогрессию, разность которой 10; наименьший угол этого многоугольника  $100^\circ$ . Сколько в многоугольнике сторон?



**Решение.**  $S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = ((200 + 10(n-1)) \cdot n) : 2 = 5n^2 + 95n$ . Сумма внутренних углов многоугольника находится по формуле, известной из геометрии:  $(n-2) \cdot 180$ .

$$5n^2 + 95n = 180n - 360;$$

$$5n^2 - 85n + 360 = 0;$$

$$n^2 - 17n + 72 = 0;$$

$$n = 8, \quad n = 9.$$

Существует два многоугольника, удовлетворяющих условию задачи: восьмиугольник и девятиугольник

## Прогрессии в биологии

**Задача №2.** Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

**Решение.** В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии, у которой  $b_1 = 1$ ,  $q = 2$ ,  $n = 72$ , находим, что  $S_{72} = 2^{72} - 1 = 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,696 - 1 = 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,695$  (бакт).

**Практическая работа №23.** «Применение таблицы производных элементарных функций»

**Задание** Вычислить производную функции:

1.  $x^7 + 5x^6 + 24x^2 - 7$

2.  $7x^4 - \sqrt[3]{x^2}$

3.  $\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}} - 4x^8$

4.  $(5x^2 - 3x)^4$

5.  $(7x + 4)^3 \cdot (8 - 6x)^5$

6.  $12x^4 - 5x^7 + 8 - 3x$

7.  $12x^3 - \sqrt[5]{x^4}$

8.  $12x^3 + \frac{4}{\sqrt[7]{x^3}}$   
 9.  $(4x^3 - 12)^5$   
 10.  $(12 - 7x)^3 \cdot (x^3 - 2x)^4$

**Практическая работа №24** «Связь производной и промежутков возрастания и убывания функции»

Задание 1. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 5; 4, 3)$ . Определите количество целых точек (у которых координата – целое число), в которых производная функции положительна, отрицательна. (рисунок 1)

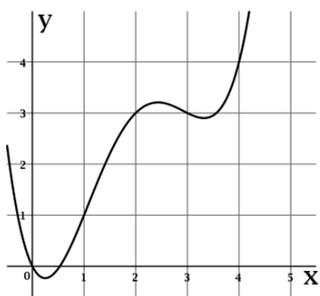


Рис.1

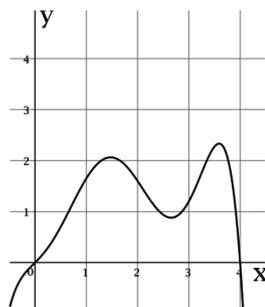


Рис.2.

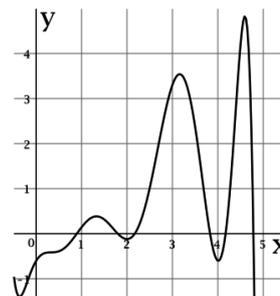


Рис.3

Задание 2. На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 5; 4, 1)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Задание 3. На рисунке изображен график  $y = f'(x)$  – производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-0, 6; 4, 8)$ . Найдите промежутки возрастания функции  $y = f(x)$ . В ответе укажите произведение целых точек, входящих в эти промежутки.

**Практическая работа №25.** «Проведение с помощью производной исследования функции»

**Задание 1**

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ .

**Задание 2**

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 6$ .

**Задание 3**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на промежутке  $[-3; 2]$ .

**Задание 4**

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .

**Задание 5**

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .

**Задание 6**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

**Задание 7**

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ .

**Задание 8**

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

**Задание 9**

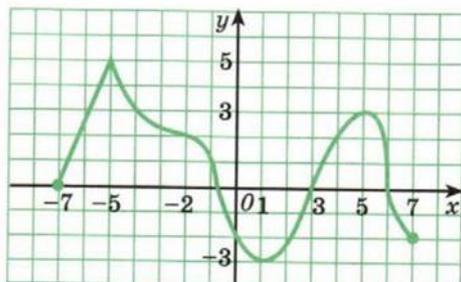
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на промежутке  $[-4; 3]$ .

### Практическая работа №26 «Наибольшее и наименьшее значение функции»

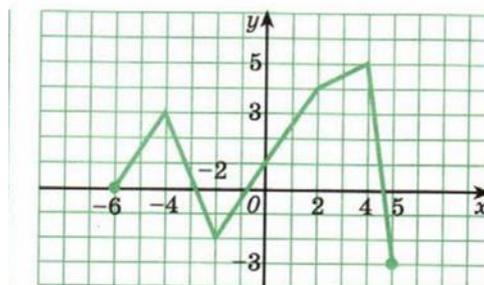
#### Задание 1

Для функций, графики которых изображены на рисунке, а-г найдите:

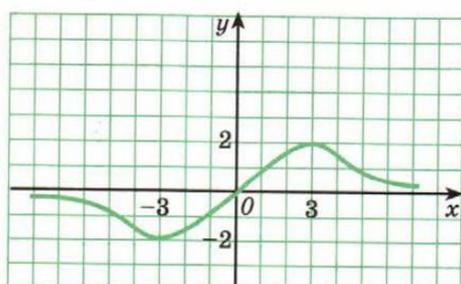
- 1) точки максимума и минимума функции; 2) экстремумы функции.



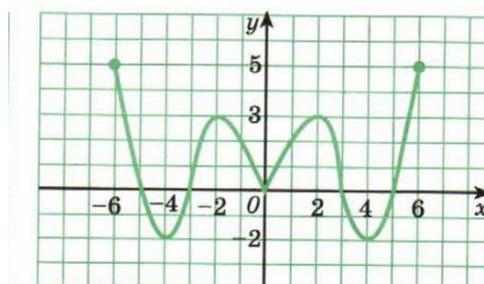
а)



б)



в)



г)

#### Задание 2

Начертите эскиз графика функции

- 1)  $x_{\max} = -3, x_{\min} = 4, f(-3) = 5, f(4) = -5$ ; 2)  $x_{\min} = -5, x_{\max} = 2, f(-5) = 1, f(2) = 6$ ;  
 3)  $f$  – четная,  $x_{\max} = -3, x_{\min} = 0, f(-3) = 4, f(0) = 0$ ;  
 4)  $f$  – нечетная,  $x_{\max} = 2, x_{\min} = 5, f(2) = 3, f(5) = -4$ .

#### Задание 3

Найдите точки максимума и минимума функции ее максимумы и минимумы

- 1)  $y = -x^2 + 6x - 8$ ; 2)  $y = \frac{3}{x-2}$ ; 3)  $y = \frac{3}{x+1} - 1$ ;  
 4)  $y = -(x+3)^5$ , 5)  $y = 3 \sin x - 1$ ; 6)  $y = 1 + 2 \operatorname{tg} x$ .

#### Задание 4

Найдите точки экстремума функции и экстремумы функции

- 1)  $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ ; 2)  $y = 4|x| - x^2$ ; 3)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; 4)  $y = 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

#### Задание 5

Докажите следующие утверждения:

- 1) если  $f$  – четная функция,  $x_0$  – точка максимума, то  $-x_0$  является точкой максимума;  
 2) если  $f$  – нечетная функция на промежутке,  $x_0$  – точка минимума, то  $-x_0$  является точкой максимума.

### Практическая работа №27 «Вторая производная функций»

1836. Найти ускорение тела, движущегося по закону  $s(t) = 2t^3 + 5t^2 + 4t$  ( $s$  — путь в метрах,  $t$  — время в минутах), в момент времени: а)  $t = 40$  сек; б)  $t = 1$  ч.

1837. Найти ускорение тела, движущегося по закону  $s = \sqrt{t}$  ( $s$  — путь в метрах,  $t$  — время в минутах), в произвольный момент времени  $t$ .

Для данных функций найти производные всех порядков (1838—1843):

1838.  $y = (x + 2)^3$ .      1840.  $y = x^2 - x - 1$ .      1842.  $y = \cos x$ .

1839.  $y = (2x - 1)^3$ .      1841.  $y = x^5 + 4x^3 - 7x^2$       1843.  $y = (1 + x)^{100}$ .

1844. Доказать, что для функции  $y = a \sin x + b \cos x$  справедливо соотношение  $y^{IV} = y$ .

1845. Сколько раз нужно продифференцировать функцию  $y = (x^2 + 1)^{100}$ , чтобы в результате получился многочлен 50-й степени?

1846\*. Найти производную 100-го порядка от функции  $y = \sin x \cos^2 x$ .

### ОТВЕТЫ

1836. а)  $18 \text{ м/мин}^2$ ; б)  $730 \text{ м/мин}^2$ . 1837.  $-\frac{1}{4t\sqrt{t}}$ .  
 1838.  $y' = 3(x + 2)^2$ ;  $y'' = 6(x + 2)$ ;  $y''' = 6$ ;  $y^{IV} = y^V = \dots = 0$ . 1839.  $y' = 6(2x - 1)^2$ ;  $y'' = 24(2x - 1)$ ;  $y''' = 48$ ;  $y^{IV} = y^V = \dots = 0$ . 1842.  $y' = -\sin x$ ;  $y'' = -\cos x$ ;  $y''' = \sin x$ ;  $y^{IV} = \cos x$  и далее все повторяется. 1845. 150 раз.  
 1846.  $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{3^{100}}{4} \sin 3x$ .

### Практическая работа №28 «Выпуклость графика функции, точки перегиба»

Задание 1. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций.

$y = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$ .     $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$ .     $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$ .

Задание 2. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций.  $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$ .

Задание 3. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вмятины графиков функций  $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$ .

### Практическая работа №29 «Применение производной к построению графиков функций»

Задание 1

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$ .

Задание 2

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 6$ .

Задание 3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$  на промежутке  $[-3; 2]$ .

Задание 4

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .

Задание 5

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .

Задание 6

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$  на отрезке  $[-2; 1]$ .

**Задание 7**

С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ .

**Задание 8**

Исследуйте функцию и постройте её график:  $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ .

**Задание 9**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на промежутке  $[-4; 3]$ .

**Практическая работа №30 «Использование геометрического и физического смысла производной для решения задач»**

**Связь производной с физическими величинами.**

Связь производной с физическими величинами	Описание величин	Физическая формула
$v = S'(t)$	$v$ – скорость $S$ – перемещение	$v = \frac{S}{t}$
$a = v'(t)$	$a$ – ускорение $v$ – скорость	$a = \frac{v}{t}$
$I = q'(t)$	$I$ – сила тока $q$ – электрический заряд	$I = \frac{q}{t}$
$\rho = m'(l)$	$\rho$ – линейная плотность $m$ – масса тела $l$ – длина тела	$\rho = \frac{m}{l}$
$\rho = m'(V)$	$\rho$ – объемная плотность $m$ – масса тела $V$ – объем	$\rho = \frac{m}{V}$

№1. Найти кинетическую энергию тела, которое движется прямолинейно по закону  $S = 1 - t + t^2$  ( $S$  – измеряется в метрах, а  $t$  – в секундах), через 10 с. после начала движения. Масса тела составляет 5 кг.

№2. В тонком неоднородном стержне длиной 25 см., масса которого (в г) распределена по закону  $m = 2l^2 + 3l$ , где  $l$  – длина стержня, отсчитываемая от его начала, найти линейную плотность в точке:

- 1) отстоящей от начала стержня на 3 см.;
- 2) в конце стержня.

№3. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента  $t = 0$  с, задается формулой  $q = 3t^2 + t + 2$ . Найдите силу тока в момент времени  $t = 3$  с.

№4. В какой момент времени скорость точки, которая движется прямолинейно по закону  $x(t) = 5t^2 + 3t - 12$ ,  $x(t)$  – перемещение в сантиметрах,  $t$  – время в секундах), будет равна 33 см/с.?

**Практическая работа №31. «Вычисление первообразной для функции»**

**Задание**

Найдите первообразную

1.  $f(x) = 6x - 9 + 3x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}$
2.  $f(x) = 5\cos(4x - 2) + 5x$
3.  $f(x) = \frac{3}{4\sin^2(5 - 2x)}$
4.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 3}} - \frac{4}{x^5}$
5.  $f(x) = \frac{3}{(5 - 7x)^4}$
6.  $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$
7.  $f(x) = \frac{4}{x} + 5^x$
8.  $f(x) = \frac{3}{2x - 5} - 4$
9.  $f(x) = 3^{4x-5} + 8e^{\frac{x}{5}+3}$

**Практическая работа №32 «Решение задач на связь первообразной и ее производной»**

*Задание*

Найдите первообразную

- $f(x) = 6x - 9 + 3x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = 5\cos(4x - 2) + 5x$
- $f(x) = \frac{3}{4\sin^2(5 - 2x)}$
- $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x + 3}} - \frac{4}{x^5}$
- $f(x) = \frac{3}{(5 - 7x)^4}$
- $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$
- $f(x) = \frac{4}{x} + 5^x$
- $f(x) = \frac{3}{2x - 5} - 4$
- $f(x) = 3^{4x-5} + 8e^{\frac{x}{5}+3}$

**Практическая работа №33. «Применение интеграла для вычисления площадей»**

*Задание 1*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y=2x$ ,  $y=3x$  и прямой  $x=1$ .

*Задание 2*

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$  и

прямыми  $x=0, x=1/2$ .

**Задание 3**

Фигура ограничена графиками функции  $y = 3 - \sqrt{x}$  и прямыми  $x=1, y=0$ . Прямая  $y=4$  делит фигуру на две части. Равны ли их площади?

**Задание 4**

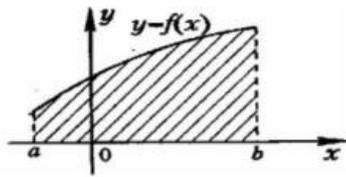
Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y=x^2+2x$ , касательной к графику в точке с абсциссой  $x_0=1$  и осью  $OY$ .

### **Практическая работа №34 «Применение интеграла для вычисления физических величин»**

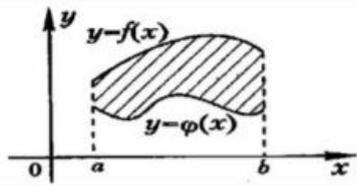
1. Скорость движения тела задана уравнением  $v = t^2 - t + 3$ . Найти уравнение движения, если в начальный момент времени  $s_0 = 3$  м.
2. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь  $s_0 = 4$  м, а его скорость задана уравнением  $v = t^2 - 6t + 7$ .
3. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти уравнение движения тела, если известно, что за 3 с оно прошло 18 м.
4. Тело движется прямолинейно со скоростью  $v(t) = (3 + 3t^2)$  м/с. Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.
5. Скорость движения тела изменяется по закону  $v(t) = (3t^2 + t + 1)$  м/с. Найти путь, пройденный телом за 4 с от начала движения.
6. Найти путь пройденный телом за 10-ю секунду, зная, что что скорость его прямолинейного движения выражается формулой  $v = t^2 + 4t - 2$  м/с.
7. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону  $v = (15t - 5t^2)$  м/с.
8. Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?
9. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?
10. Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.
11. Вычислить силу давления воды на одну из стенок аквариума, имеющего длину 30 см и высоту 20 см.

### **Практическая работа №35 «Применение производной и интеграла к решению практических задач»**

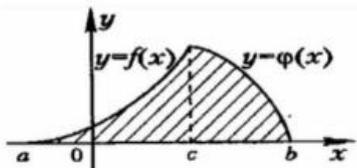
Вычислите площадь криволинейных фигур



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) dx$$



$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$$

### Практическая работа №36 «Метод разложения на множители»

#### Задание 1

Решить уравнение  $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$

#### Задание 2

Решить уравнение  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

#### Задание 3

Решить уравнение  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

#### Задание 4

Решить уравнение  $\sin 2x = 0$

### Практическая работа №37 «Метод введения новой переменной для решения уравнений»

Решите уравнения, систему уравнений методом введения новой переменной.

$$\begin{cases} \frac{5}{3x-y} + \frac{3}{x-3y} = -2 \\ \frac{15}{3x-y} + \frac{2}{x-3y} = 1 \end{cases}$$

Несложно заметить в обоих уравнениях системы одинаковые выражения. Поэтому первым действием вводим новые

переменные:

Получена систему, которую можем решить любым из ранее рассмотренных способов. Решим с помощью метода подстановки. Выразим  $a$  в первом

$$\frac{5}{3x-y} = a, \frac{1}{x-3y} = b$$

Выполняем замену:

простейшая линейная система, любым из ранее рассмотренных способов. Решим с помощью метода подстановки. Выразим  $a$  в первом

$$\begin{cases} a + 3b = -2 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3x-y} + \frac{3}{x-3y} = -2 \\ \frac{15}{3x-y} + \frac{2}{x-3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = -2 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b - 2 \\ -7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Теперь необходимо вернуться к исходным переменным:

$$\begin{cases} \frac{5}{3x-y} = 1 \\ \frac{1}{x-3y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y = 5 \neq 0 \\ x-3y = -1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y = 5 \\ x-3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y = 5 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3y-1)-y = 5 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y-3-y = 5 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y = 8 \\ x = 3y-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2;1)

Задание 2. Решить систему методом введения новых переменных:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0,5 \\ 3 \cos 2y - \cos x = 2,5 \end{cases}$$

Вводим и изучаем новые переменные:

$$\cos x = a \in [-1; 1]; \cos 2y = b \in [-1; 1];$$

Производим замену:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2y = -0,5 \\ 3 \cos 2y - \cos x = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -0,5 \\ 3b - a = 2,5 \end{cases}$$

Полученную систему можно решать различными способами, мы применим метод алгебраического сложения:

$$\begin{cases} a + b = -0,5 \\ 3b - a = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow 4b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Подставим найденное значение в первое уравнение и найдем a:

$$a + b = -0,5 \Leftrightarrow a + 0,5 = -0,5 \Leftrightarrow a = -1$$

Найденные значения удовлетворяют ОДЗ. Переходим к исходным переменным:

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in Z \\ 2y = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in Z \\ 2y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in Z \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ:  $(\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi k), (\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi k), k, n \in Z$

Обратим внимание, что здесь n и k никак не связаны между собой и при нахождении значений x и y нужно ставить разные целочисленные переменные.

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases}$$

Очевидна замена:

$$\begin{cases} \lg x = a \\ \lg y = b \end{cases}$$

Не забываем про ОДЗ:  $x > 0, y > 0$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки, выразим в первом уравнении  $a$  и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ (b + 1)^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + 2b + 1 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ 2b^2 + 2b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 1 \\ \begin{cases} b = -2 \\ b = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Вернемся к исходным переменным:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = -1 \\ \lg y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,1 \\ y = 0,01 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2 \\ \lg y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$$

Ответ:  $(0,1;0,01), (100;10)$

$$(3x - 14)^2 - 4(3x - 14) + 3 = 0$$

$$(2x - 21)^2 - 5(2x - 21) + 4 = 0.$$

Обозначаем  $2x - 21 = y$ . Получается простое квадратное уравнение:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \text{ по теореме Виета;}$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 1.$$

Возвращаемся к обозначенному:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2x - 21 = 4; \\ & 2x = 25; \\ & x = 12,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 2x - 21 = 1; \\ & 2x = 22; \\ & x = 11 \end{aligned}$$

Ответ:  $x = 12,5; x = 11$ .

Методом введения новой переменной решаются биквадратные уравнения:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ где } a, b, c \in R;$$

В биквадратных уравнениях всегда используется новая переменная.

$$x^2 = y;$$

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Получается квадратное уравнение.

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0;$$

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0;$$

$$x^2 = y, \text{ тогда } y^2 - 13y + 12 = 0;$$

$$y_1 = 12, \quad y_2 = 1.$$

$$1) x^2 = 12; \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3};$$

$$2) x^2 = 1, \quad x = \pm 1.$$

$$\text{Ответ : } \{-2\sqrt{3}; -1; 2\sqrt{3}; 1\}.$$

Какую замену можно использовать в этом уравнении?

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+11} = 2. \text{ Стараемся выгодно обозначить.}$$

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+10+1} = 2; \quad x^2 + 10 = y;$$

$$\frac{4}{y} + \frac{5}{y+1} = 2.$$

### Практическая работа №38 «Решение неравенств с одной переменной»

Рассмотрим решение в общем виде:  $f(x) > g(x)$  (1).

$x_0$  называется частным решением, если  $f(x_0) > g(x_0)$ .

Множество всех частных решений есть общее решение (или просто решение) неравенства. Решить неравенство – значит найти его общее решение.

Рассмотрим отличия неравенств от уравнений:

1. Имеет бесконечное множество решений (как правило).
2. Невозможна проверка подстановкой в исходное неравенство.

Поэтому неравенства можно решать только равносильными преобразованиями:

$$f(x) > g(x) \dots \Leftrightarrow (2) \dots x \in X$$

Решение неравенства заключается в замене исходного неравенства более простым, но равносильным неравенством.

*Определение 1.*

Неравенства  $f(x) > g(x)$  (1) и  $p(x) > k(x)$  (2) называются равносильными, если их решения совпадают.  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow p(x) > k(x)$ .

Пример 1

*Пример 1.*

$$1. \quad 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \log(4x - 1) > 0 \Leftrightarrow 4x - 1 > 1 \Leftrightarrow 4x > 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Множества решений совпадают. Значит:

$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \log(4x - 1) > 0$$

Определение 2. Равносильность неравенств

Определение 2. Если решение неравенства  $f(x) > g(x)$  (1) содержится в решении неравенства  $p(x) > k(x)$  (2), то неравенство (2) есть следствие неравенства (1).

$$f(x) > g(x) \Rightarrow p(x) > k(x)$$

Рассмотрим некоторые из равносильных преобразований:

$$1. \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$$

$$2. \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) > g^{2n+1}(x)$$

$$3. \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \stackrel{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) > g(x)$$

$$4. \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \stackrel{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) < g(x)$$

$$5. \quad f(x) > g(x) \stackrel{h(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) * h(x) > g(x) * h(x)$$

$$6. \quad f(x) > g(x) \stackrel{h(x)<0}{\Leftrightarrow} f(x) * h(x) < g(x) * h(x)$$

Рассмотрим примеры, в которых можно допустить типовые ошибки:

Пример 2

$$1. \quad \frac{1}{x} \leq 1$$

«Решение»:

$$x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} * x \leq 1 * x$$

$$x \geq 1$$

«Ответ»:  $x \geq 1$  ( $x = -10, = -11$  – частные решения)

Проблема в умножении на  $x$ . Он мог быть и отрицательным, и положительным. Надо менять знак.

Правило: в неравенствах нельзя умножать на  $x$ , если его знак не известен.

$$2. \frac{1}{x} = 1$$

Решение:

$$\frac{1}{x} * x = 1 * x$$

$$x = 1$$

Ответ:  $x = 1$  (верно)

Правильное решение:

3.

$$1. \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

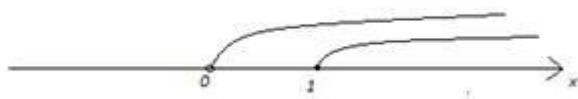


Рис. 1. Иллюстрация к примеру 1

$$2. \begin{cases} \frac{1}{x} \leq 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$



Рис. 2. Иллюстрация к примеру 2

Ответ:  $x < 0$  или  $x \geq 1$

### Практическая работа №39 «Системы уравнений. Метод подстановки»

Рассмотрим системы двух уравнений с двумя неизвестными (1) и трех уравнений с тремя неизвестными (2).

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \end{cases} (1)$$

Здесь  $p$  и  $q$  – некоторые выражения, зависящие от пары переменных  $x$  и  $y$ .

$$\begin{cases} p(x, y, z) = 0 \\ q(x, y, z) = 0 \\ r(x, y, z) = 0 \end{cases} (2)$$

Здесь  $p$ ,  $q$  и  $r$  – некоторые выражения, зависящие от тройки переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Частным решением системы 1 называется пара чисел  $(x_0; y_0)$  такая, при подстановке которой в уравнения системы получим верные равенства.

Частным решением системы 2 называется тройка чисел  $(x_0; y_0; z_0)$  такая, при подстановке которой в уравнения системы получим верные равенства.

Решить систему уравнений означает найти множество всех ее решений.

Чтобы найти множество всех решений системы, лучше всего пользоваться эквивалентными или равносильными преобразованиями, то есть такими, которые не искажают множество решений. В результате таких преобразований мы получаем равносильные системы, то есть имеющие одно и то же множество решений

Таким образом, процесс решения системы сводится к постепенному переходу от заданной сложной системы к все более простой и так до тех пор, пока не получим ответ.

Методы решения систем с помощью эквивалентных преобразований:

-метод подстановки;

-метод алгебраического сложения;

-метод введения новых переменных;

2. Суть метода подстановки

Повторим метод подстановки. Напомним суть данного метода. Мы рассматриваем заданную систему вида 1 и замечаем, что в одном из уравнений, пусть во втором, легко выразить одну переменную через другую, пусть  $y$  через  $x$ :

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ q(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x, y) = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$$

Полученное выражение подставляем в первое уравнение системы:

$$\begin{cases} p(x, y) = 0 \\ y = y(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x, y(x)) = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$$

Таким образом мы получаем одно уравнение (в данном случае первое) только относительно  $x$ . решаем это уравнение, находим все значения  $x$ , подставляем их в выражение для  $y$  и находим соответствующие значения  $y$ .

### 3. Решение примеров

Пример 1 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ xy = -2 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x(1 - x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x - x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2 \\ y = 1 - x \\ x = -1 \end{cases}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x = 2 \\ y = 1 - x \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2 \\ x = 2 \\ y = 1 - (-1) \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (2; -1), (-1; 2)$$

Пример 2 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $x$ :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^x 3^y = 24 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2^{y+2} 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * 2^y 3^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * (2 * 3)^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 4 * 6^y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 6^y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Находим соответствующее значение  $x$ :

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (3;1)$$

В следующей системе важно обратить внимание на ОДЗ.

Пример 3 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} \log_{y+2}(x+3) = 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

Укажем ОДЗ для первого уравнения:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ y + 2 > 0 \\ y + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ y > -2 \\ y \neq -1 \end{cases}$$

При соблюдении ОДЗ первое уравнение можно преобразовать:

$$(y + 2)^1 = x + 3 \Leftrightarrow y + 2 = x + 3$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3(x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3x - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 4 \\ y = x + 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 + 1 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Сверившись с ОДЗ, выписываем ответ. Ответ: (5;4), (-1;0)

Пример 4 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить y:

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - \cos(\pi - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x - (-\cos x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ 2 \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\arccos \frac{1}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - x \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

Находим соответствующие значения y:

$$\begin{cases} y = \pi - x \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi - x \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - \frac{\pi}{3} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \pi + \frac{\pi}{3} - 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} - 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \frac{4\pi}{3} - 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

Ответ:  $(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} - 2\pi n), (-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} - 2\pi n)$

Обратим внимание, что n здесь пробегает все целочисленные значения

Пример 5 – решить систему методом подстановки:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$y - x = \sqrt{2^4} = 4 > 0 \rightarrow \text{ОДЗ соблюдено}$$

Получили равносильную систему:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

В данном случае удобно из первого уравнения выразить  $y$ :

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases}$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 * 3^{y-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 * 3^{x+4-2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 * 3^{x+2} = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 2 * 9 * 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x + 18 * 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 19 * 3^x = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 3^x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Находим соответствующие значения  $y$ :

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 4 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: (2;6)

#### Практическая работа №40 «Системы уравнений. Метод алгебраического сложения»

$$1) \begin{cases} | 3x - y + 2 = 0 \\ | -x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} | 2x + 6y = 120 \\ | 2x - 2y = 20 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

Решите методом сложения систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 5x - 6y = 7, \\ 10x + 6y = 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3x - 5y = 14, \\ 2x - 7y = 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + 4y = 25, \\ 5x - 3y = -3; \end{cases}$$

Решите систему уравнений методом сложения:

$$1) \begin{cases} 3x - 7y = 11, \\ 6x + 7y = 16; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 7x - 5y = -5. \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 4x - 6y = -7; \end{cases}$$

**Практическая работа №41** «Системы уравнений. Метод введения новых переменных»  
Задание 1.

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 7x - 6y = -4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x - y) = 5, \\ 4(x + 3y) - 3y = 17; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 5y = 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{3y}{2} = 14, \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 10. \end{cases}$$

Задание 2.

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 4, \\ 5x - 2y = 14; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3(2x - y) - 5(x + y) = -7, \\ 2(x + 4y) - 5y = 5; \end{cases}$$
$$2) \begin{cases} 5x - 3y = 7, \\ 7x - 6y = 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{7y}{2} = 11, \\ \frac{4x}{3} - \frac{y}{2} = 7. \end{cases}$$

**Практическая работа №42** «Применение определителя для решения системы линейных уравнений»

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы столько линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается  $\Delta$  (дельта).

Определители  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$

получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases} \quad (2)$$

Согласно *теореме Крамера* имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)}{3 \cdot 4 - 1 \cdot 2} =$$
$$= \frac{4 + 6}{12 - 2} = \frac{10}{10} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot (-3) - 1 \cdot 1}{3 \cdot 4 - 1 \cdot 2} =$$
$$= \frac{-9 - 1}{12 - 2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

**Итак, решение системы (2):**

$$x_1 = 1, x_2 = -1.$$

**Задание 1.** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ 5x + 9y = 1 \end{cases}$$

**Задание 2.** Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$$

**Задание 3.** Вычислить

А)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

Б)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$

**Практическая работа №43.** «Применение математических методов для решения содержательных задач»

Велосипедист на протяжении первых 20 км ехал со скоростью 20 км/ч, следующие 15 км - 10 км/ч, а последние 30 км - со скоростью 10 км/ч. Необходимо найти среднюю скорость движения велосипедиста.

В субботу акции поднялись в цене на неизвестное число процентов, однако во вторник на такое же число процентов от новой суммы они подешевели. В результате такого скачка цен, они стали на 4% дешевле. Необходимо узнать процент, на который акции увеличили стоимость в субботу.

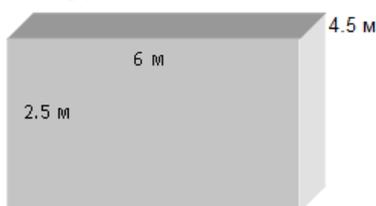
Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	2,5 руб. за 1 Мб
План «500»	600 руб. за 500 Мб трафика в месяц	2 руб. за 1 Мб сверх 500 Мб
План «800»	850 руб. за 800 Мб трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь планирует, что его трафик составит 600 Мб и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей должен заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Мб?

Решено комнату (включая потолок) оклеить обоями. Обои покупаются с запасом 20% от оклеиваемой площади. Стоимость обоев указана в таблице. Потолок решено оклеить белыми обоями, стены - зелеными.

Ширина двери комнаты равна 0,8 м, высота - 2 м. Ширина окна - 1,5 м, высота - 1 м. Сколько рублей надо заплатить за обои, если эскиз комнаты представлен на рисунке?



Цена обоев за 1 м <sup>2</sup> (в руб.) в зависимости от покупки			
	до 30 м <sup>2</sup>	от 30 до 100 м <sup>2</sup>	свыше 100 м <sup>2</sup>
Белые	14	13	12
Зеленые	12	11	10

#### Практическая работа №44 «Прямоугольный параллелепипед»

Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  и четырех параллелограммов  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CDD_1C_1$ ,  $DAA_1D_1$ , называется **параллелепипедом** (рис. 1).

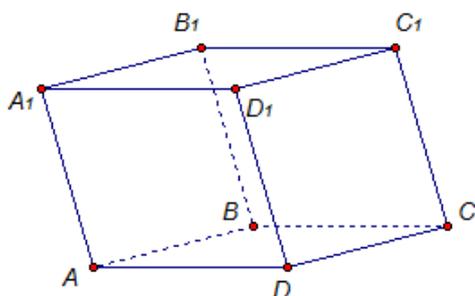


Рис.

1

Параллелепипед

То есть: имеем два равных параллелограмма  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  (основания), они лежат в параллельных плоскостях так, что боковые ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $DD_1$ ,  $CC_1$  параллельны. Таким образом, составленная из параллелограммов поверхность называется **параллелепипедом**.

Таким образом, поверхность параллелепипеда - это сумма всех параллелограммов, из которых составлен параллелепипед.

### Свойства параллелепипеда

1. *Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.*  
(фигуры равны, то есть их можно совместить наложением)

Например:

$ABCD = A_1B_1C_1D_1$  (равные параллелограммы по определению),

$AA_1B_1B = DD_1C_1C$  (так как  $AA_1B_1B$  и  $DD_1C_1C$  – противоположные грани параллелепипеда),

$AA_1D_1D = BB_1C_1C$  (так как  $AA_1D_1D$  и  $BB_1C_1C$  – противоположные грани параллелепипеда).

2. *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

Диагонали параллелепипеда  $AC_1$ ,  $B_1D$ ,  $A_1C$ ,  $D_1B$  пересекаются в одной точке  $O$ , и каждая диагональ делится этой точкой пополам (рис. 2).

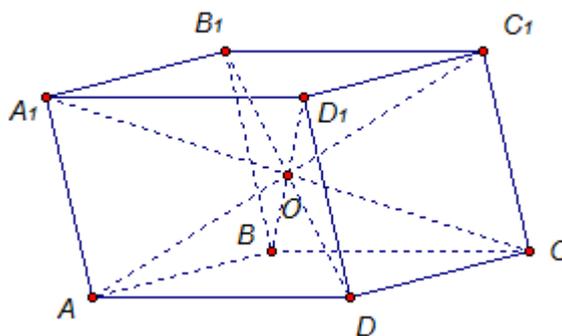


Рис. 2 Диагонали параллелепипеда пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

3. *Имеются три четверки равных и параллельных ребер параллелепипеда: 1 –  $AB$ ,  $A_1B_1$ ,  $D_1C_1$ ,  $DC$ , 2 –  $AD$ ,  $A_1D_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $BC$ , 3 –  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$ .*

### Прямой параллелепипед

**Определение. Параллелепипед называется прямым, если его боковые ребра перпендикулярны основаниям.**

Пусть боковое ребро  $AA_1$  перпендикулярно основанию (рис. 3). Это означает, что прямая  $AA_1$  перпендикулярна прямым  $AD$  и  $AB$ , которые лежат в плоскости основания. А, значит, в боковых гранях лежат прямоугольники. А в основаниях лежат произвольные параллелограммы. Обозначим,  $\angle BAD = \varphi$ , угол  $\varphi$  может быть любым.

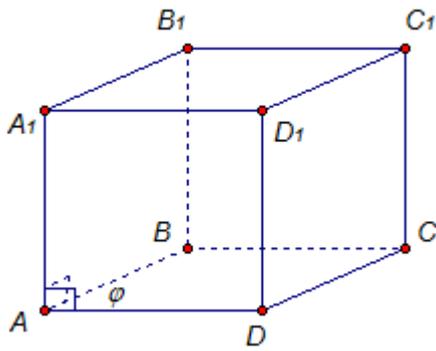


Рис. 3 Прямой параллелепипед

Итак, прямой параллелепипед - это параллелепипед, в котором боковые ребра перпендикулярны основаниям параллелепипеда.

### Прямоугольный параллелепипед

Определение. **Параллелепипед называется прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию. Основания являются прямоугольниками.

Параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – прямоугольный (рис. 4), если:

1.  $AA_1 \perp ABCD$  (боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, то есть параллелепипед прямой).
2.  $\angle BAD = 90^\circ$ , т. е. в основании лежит прямоугольник.

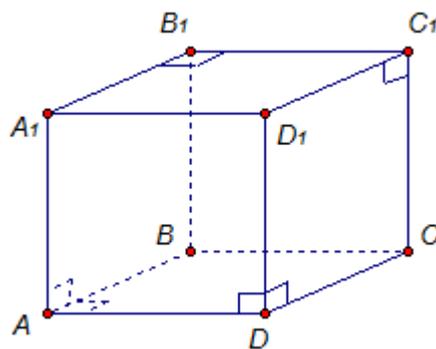


Рис. 4 Прямоугольный параллелепипед

*Прямоугольный параллелепипед обладает всеми свойствами произвольного параллелепипеда. Но есть дополнительные свойства, которые выводятся из определения прямоугольного параллелепипеда.*

Итак, **прямоугольный параллелепипед** - это параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны основанию. **Основание прямоугольного параллелепипеда - прямоугольник.**

### Свойства прямоугольного параллелепипеда

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней прямоугольники.

$ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  – прямоугольники по определению.

2. Боковые ребра перпендикулярны основанию. Значит, все боковые грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники.

3. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.

Рассмотрим, например, двугранный угол прямоугольного параллелепипеда с ребром  $AB$ , т. е. двугранный угол между плоскостями  $ABB_1$  и  $ABC$ .

$AB$  – ребро, точка  $A_1$  лежит в одной плоскости – в плоскости  $ABB_1$ , а точка  $D$  в другой – в плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ . Тогда рассматриваемый двугранный угол можно еще обозначить следующим образом:  $\angle A_1ABD$ .

Возьмем точку  $A$  на ребре  $AB$ .  $AA_1$  – перпендикуляр к ребру  $AB$  в плоскости  $ABB_1$ ,  $AD$  перпендикуляр к ребру  $AB$  в плоскости  $ABC$ . Значит,  $\angle A_1AD$  – линейный угол данного двугранного угла.  $\angle A_1AD = 90^\circ$ , значит, двугранный угол при ребре  $AB$  равен  $90^\circ$ .

$$\angle(ABB_1, ABC) = \angle(AB) = \angle A_1ABD = \angle A_1AD = 90^\circ.$$

Аналогично доказывается, что любые двугранные углы прямоугольного параллелепипеда прямые.

### Теорема

*Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.*

Примечание. Длины трех ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, являются измерениями прямоугольного параллелепипеда. Их иногда называют длина, ширина, высота.

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный параллелепипед (рис. 5).

Доказать:  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ .

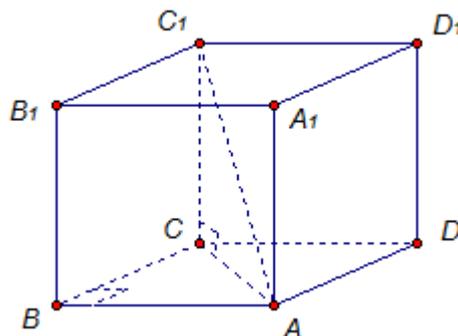


Рис. 5 Прямоугольный параллелепипед

Доказательство:

Прямая  $CC_1$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , а значит, и прямой  $AC$ . Значит, треугольник  $CC_1A$  – прямоугольный. По теореме Пифагора:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$ . По теореме Пифагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Но  $BC$  и  $AD$  – противоположные стороны прямоугольника. Значит,  $BC = AD$ . Тогда:

$$AC^2 = AB^2 + AD^2$$

Так как  $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$ , а  $AC^2 = AB^2 + AD^2$ , то  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + CC_1^2$ . Поскольку  $CC_1 = AA_1$ , то  $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$  что и требовалось доказать.

### Следствие - Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны

*Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.*

Обозначим измерения параллелепипеда  $ABC$  как  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (см. рис. 6), тогда  $AC_1 = CA_1 = B_1D = DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

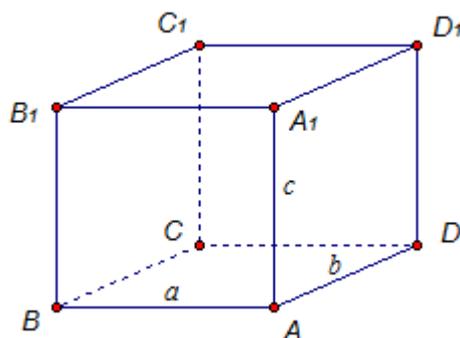


Рис. 6

### Куб

**Определение.** Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.

*Все грани куба – это равные квадраты.*

### Задача 1 Найти диагональ куба

Найти диагональ куба с ребром 1 (рис. 7).

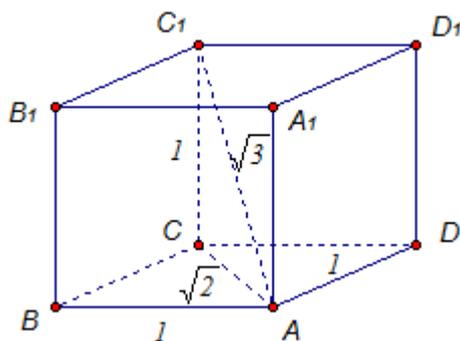


Рис. 7

Решение:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ:  $\sqrt{3}$  см.

### Задача 2

Рисунок

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 8). Докажите, что плоскости  $ABC_1$  и  $A_1 B_1 D$  перпендикулярны.

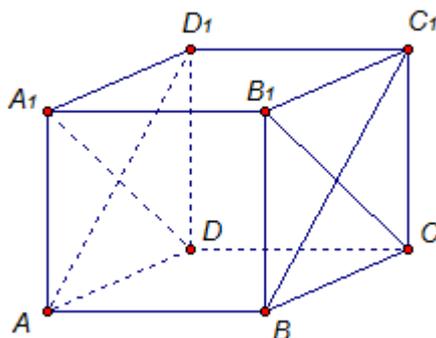


Рис. 8

Доказательство:

Прямые  $BC_1$  и  $B_1C$  перпендикулярны как диагонали квадрата  $BB_1C_1C$ .

Прямая  $DC$  перпендикулярна плоскости  $BB_1C_1$ , а значит, и прямой  $BC_1$ , которая лежит в этой плоскости.

Имеем, прямая  $BC_1$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $B_1C$  и  $DC$  плоскости, значит  $A_1B_1D$ . Значит, прямая  $BC_1$  перпендикулярна плоскости  $A_1B_1D$ .

Плоскость  $ABC_1$  проходит через перпендикуляр  $BC_1$  ко второй плоскости  $A_1B_1D$ , значит, плоскости  $ABC_1$  и  $A_1B_1D$  перпендикулярны по признаку, что и требовалось доказать.

**Практическая работа №45** «Решение стереометрических задач, связанных с перпендикулярностью прямых и плоскостей, используя планиметрические факты и методы»

**«Перпендикулярность прямой и плоскости»**

Вариант 1

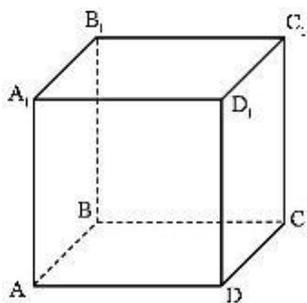


Рис. 1

A1. Пользуясь изображением на рисунке 1, назовите:

- а) точку пересечения прямой  $AD$  с плоскостью  $DD_1C$ ;
- б) линию пересечения плоскостей  $ADD_1$  и  $D_1CD$ .

В какой из плоскостей  $ADD_1$ ,  $A_1B_1B$ ,  $BB_1C_1$ ,  $BCD$  не лежит точка  $A$ ?

и постройте:

- а) точку пересечения прямой  $AD$  с плоскостью  $ABC$ ;
- б) линию пересечения плоскостей  $ADD_1$  и  $D_1CD$ .

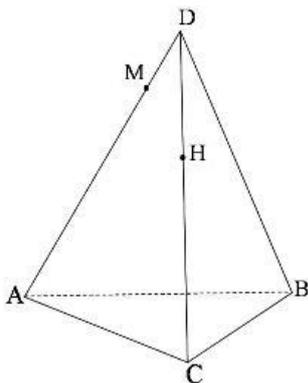


Рис. 2

A2. Перечертите рисунок 2 в тетрадь

и постройте:  
а) точку пересечения прямой  $MN$  с плоскостью  $ABC$ ;  
б) линию пересечения плоскостей  $MNB$  и  $ABC$ .  
В1. Точка  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Принадлежит ли точка  $C$  плоскости, в которой лежат точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ ?

Вариант 2

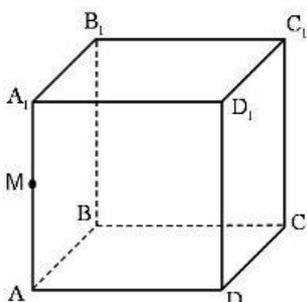


Рис. 1

A1. Пользуясь изображением на рисунке 1, назовите:

- а) точку пересечения прямой  $MC$  с плоскостью  $B_1BC_1$ ;
- б) линию пересечения плоскостей  $MC_1C$  и  $BCB_1$ .

В каких из плоскостей  $ADD_1$ ,  $ABB_1$ ,  $ABD$ ,  $MD_1C_1$ , лежит прямая  $MD_1$ ?

A2. Перечертите

- а) точку пересечения прямой  $MC$  с плоскостью  $ABC$ ;
- б) линию пересечения плоскостей  $MC_1C$  и  $BCB_1$ .

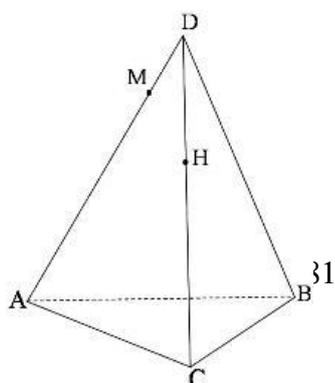


Рис. 2

и постройте:  
а) точку пересечения прямой  $MK$  с плоскостью  $ABC$ ;  
б) линию пересечения плоскостей  $MKB$  и  $ADC$ .

В1. Точка  $O$  – центр окружности, описанной около четырехугольника  $ABCD$ . Точки  $A$ ,  $O$  и  $C$  принадлежат плоскости  $\alpha$ . Принадлежит ли этой плоскости вершина  $D$ ?

**«Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол»**

**Вариант I**

1. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ , прямая  $b$  также параллельна плоскости  $\alpha$ . Могут ли  $a$  и  $b$ :

- а) Быть параллельными?
- б) Пересекаться?
- в) Быть скрещивающимися прямыми?

2. Точка  $M$  лежит вне плоскости параллелограмма  $ABCD$ .

- а) Докажите, что средние линии треугольников  $MAD$  и  $MBC$  параллельны.
- б) Найдите эти средние линии, если боковая сторона параллелограмма равна 5, а его высота равная 4 и делит сторону, к которой проведена, пополам.

3. Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.  $BN:NC=5:8$ .  $MB:AB=5:13$ .

- а) Докажите, что  $AC \parallel \alpha$ .
- б) Найдите  $MN$ , если  $AC=26$ .

4. Через вершину  $C$  квадрата  $ABCD$ , проходит прямая  $CK$ , не лежащая в плоскости квадрата.

- а) Докажите, что  $CK$  и  $AD$  скрещивающиеся.
- б) Чему равен угол между  $CK$  и  $AD$ . Угол  $CBK$  равен 45 градусов, угол  $CKB$  равен 75 градусов?

**Вариант II**

1. Прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ , прямая  $b$  также пересекает плоскости  $\alpha$ . Могут ли  $a$  и  $b$ :

- а) Быть параллельными?
- б) Пересекаться?
- в) Быть скрещивающимися прямыми?

2. Треугольник  $ABC$  и трапеция  $KMNP$  имеют общую среднюю линию  $EF$ ,  $MN \parallel EF$ ,  $EF \parallel BC$ .

- а) Докажите, что  $BC \parallel KP$ .
- б) Найдите  $KP$  и  $MN$ , если  $BC=24$ ,  $KP:MN = 8:3$ .

3. Плоскость  $\alpha$  проходит через сторону  $AB$  треугольника  $ABC$ . Прямая пересекает

стороны BC и AC в точках M и N соответственно.  $MC:BC=6:13$ ,  $NC:AN=6:7$ .

а) Докажите, что  $MN \parallel \alpha$ .

б) Найдите MN, если  $AC=39$ .

4. Точка F лежит вне плоскости трапеции ABCD.

а) Докажите, что AF и BC скрещивающиеся.

б) Чему равен угол между AF и BC, если угол AFD равен 70 градусов, угол FDA равен 40 градусов?

### Практическая работа №46 «Площадь поверхности призмы, пирамиды»

Задание 1

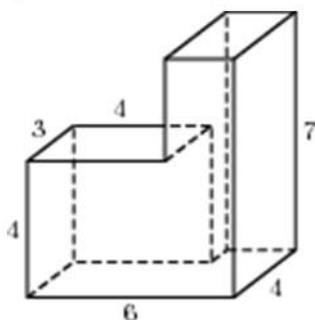
Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

Задание 2

Через среднюю линию основания треугольной призмы, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 37.

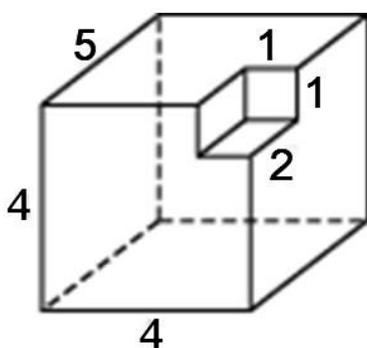
Задание 3

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



Задание 4

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



### Практическая работа №47 «Площадь поверхности цилиндра»



Рис. 1. Цилиндрическая бочка

Мы с вами знаем, что такое цилиндр, попробуем найти площадь его поверхности. Зачем нужно решать такую задачу? Например, нужно понять, сколько материала пойдет на изготовление цилиндрической бочки (См. Рис. 1).

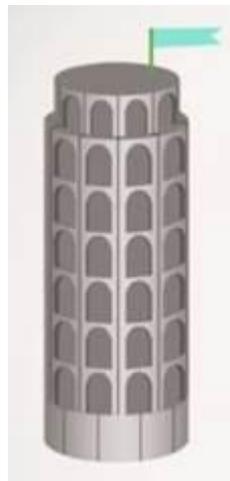
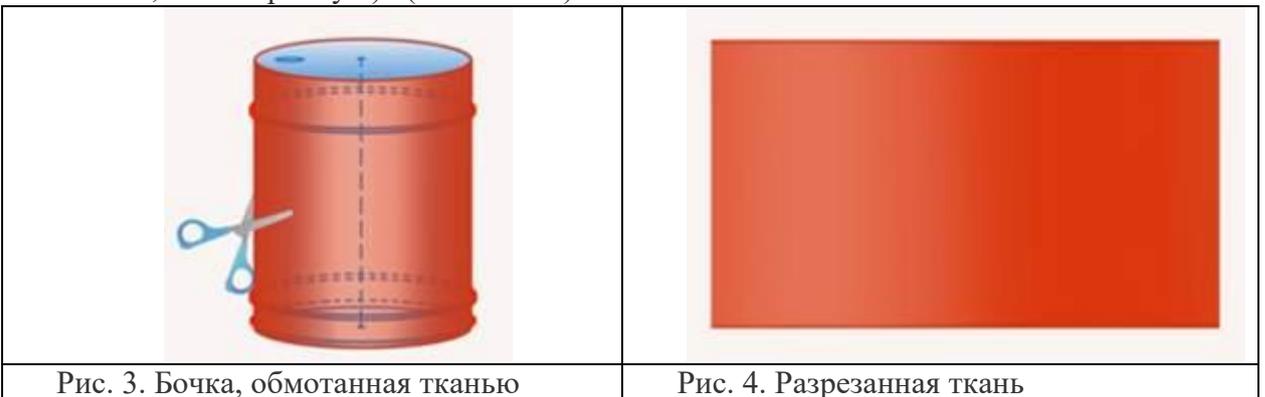


Рис. 2. Пизанская башня

Или сколько кирпичей понадобится, чтобы сложить кирпичную башню (вроде Пизанской, только ровную)? (См. Рис. 2.)



Конечно, измерить площадь боковой поверхности цилиндра просто так не получится. Но представим себе все ту же бочку, обмотанную тканью. (См. Рис. 3.) Как найти площадь куска ткани? Ну конечно, разрезав ткань и разложив ее на столе! Получится прямоугольник, его площадь легко найдем. (См. Рис. 4.)

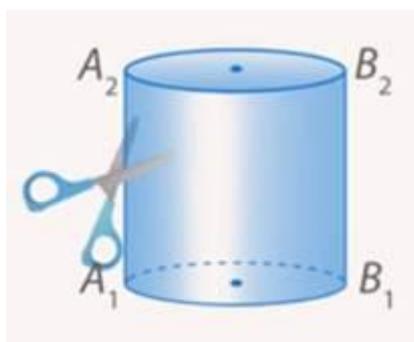


Рис. 5

Сделаем так же с цилиндром. «Разрежем» его боковую поверхность вдоль любой образующей, например  $A_1A_2$ . (См. Рис. 5.)

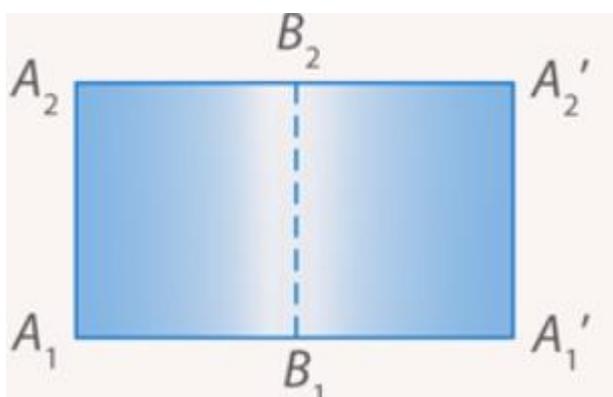


Рис. 6. Развертка боковой поверхности

Теперь «размотаем» боковую поверхность на плоскость. Получаем прямоугольник  $A_1A_2B_2B_1$ , где  $A_1$  и  $A_1'$  – одна и та же точка на цилиндре (аналогично  $A_2$  и  $A_2'$ ). (См. Рис. 6.)

Такой прямоугольник называется разверткой боковой поверхности цилиндра.

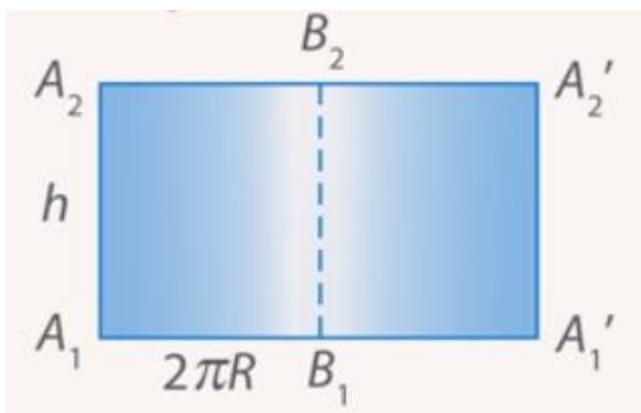


Рис. 7. Развертка боковой поверхности

Что мы знаем про этот прямоугольник? Его сторона  $A_1A_2$  равна высоте цилиндра (ведь

образующая равна высоте). Другая сторона  $A_1A'_1$  равна длине окружности основания, то есть  $2\pi R$ . (См. Рис. 7.)

Значит, площадь прямоугольника равна  $2\pi R h$ . Итак,  $S_{\text{б.п.}} = 2\pi R h$ , где  $R$  – радиус основания цилиндра,  $h$  – высота.

Площадь полной поверхности цилиндра

Наряду с площадью боковой поверхности можно найти и площадь полной поверхности. Для этого к площади боковой поверхности надо прибавить площади оснований. Но каждое основание – это круг радиуса  $R$ , чья площадь по формуле равна  $\pi R^2$ .

Окончательно, имеем:

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{б.п.}} + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h), \text{ где } R \text{ – радиус основания цилиндра, } h \text{ – высота.}$$

Примеры задач на применение выведенных формул

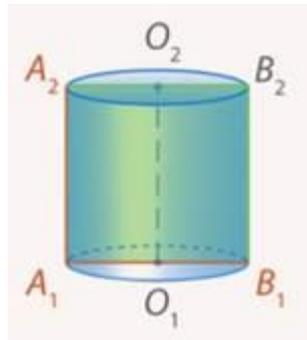


Рис. 8. Иллюстрация к примеру 1

*Пример 1.* Площадь боковой поверхности цилиндра равна  $S$ . Найти площадь осевого сечения цилиндра. (См. Рис. 8.)

Решение. Как мы знаем,  $S_{\text{б.п.}} = 2\pi R h$ , а  $S_{\text{ос.}} = 2Rh$ . Значит  $S_{\text{ос.}} = S_{\text{б.п.}} : \pi = \frac{S}{\pi}$ .

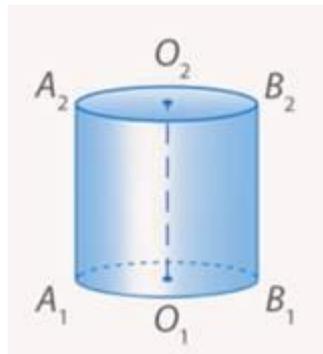


Рис. 9. Иллюстрация к примеру 2

Ответ:  $\frac{S}{\pi}$ .

**Пример 2.** Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  $288\pi \text{ см}^2$ . Найдите радиус основания и высоту. (См. Рис. 9.)

Решение. По формуле имеем:  $2\pi R(R + h) = 288\pi$ ;  $R(R + h) = 144$ .

По условию,  $h = R + 12$ , имеем:

$$R(2R + 12) = 144; R^2 + 6R - 72 = 0;$$

$$\begin{cases} R = 6 \\ R = -12 \end{cases}$$

Так как радиус положителен, то  $R = 6 \text{ см}; h = 18 \text{ см}$ .

Ответ:  $R = 6 \text{ см}; h = 18 \text{ см}$ .

### Практическая работа №48 «Площадь боковой и полной поверхности конуса»

1. Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, его объем.
2. Осевое сечение конуса равносоставленный треугольник со стороной 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности конуса. Объем конуса.
3. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между этой диагональю и образующей равен  $30^\circ$ . Найдите радиус цилиндра, его высоту, площади боковой и полной поверхностей и объем.
4. Пусть  $V$ ,  $r$  и  $h$  соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найдите:
  - а)  $V$ , если  $r=2\sqrt{2}$  см,  $h=3$  см; б)  $r$ , если  $V=120 \text{ см}^3$ ,  $h=3,6$  см; в)  $h$ , если  $r=h$ ,  $V=8\pi \text{ см}^3$

### Практическая работа №49 «Вычисление площади поверхности тел вращения.»

Вариант 1

1. Образующая конуса равна 8 см и наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите полную поверхность конуса.
2. Боковая поверхность конуса равна  $S$ , а радиус основания –  $R$ . Найдите длину хорды основания, которая видна из вершины конуса под углом  $\alpha$ .
3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6 см. Найдите боковую поверхность конуса, если его высота равна 4 см.

Вариант 2

1. Высота конуса равна 3 см и составляет с образующей угол  $60^\circ$ . Найдите полную поверхность конуса.
2. Боковая поверхность конуса равна  $S$ , а образующая –  $l$ . Найдите длину хорды основания, которая видна из центра основания под углом  $\alpha$ .
3. Радиус большего основания усеченного конуса равен 7 см, а его высота и образующая равны 3 и 5 см соответственно. Найдите боковую поверхность конуса.

### Практическая работа №50 «Объем призмы, цилиндра, пирамиды, конуса и шара»

Легко или сложно вычислять объемы? Пока мы умеем находить лишь объемы параллелепипедов, цилиндров и призм, поэтому задача вычисления объемов кажется довольно легкой. Действительно, и формулы доказывались без труда, и вычисления были не слишком громоздкими. Собственно, формула для нахождения объема прямоугольного

параллелепипеда известна еще с начальной школы.

Идея была относительно проста. Мы ввели объем куба, через него нашли объем прямоугольного параллелепипеда, по сути, «разбив» его на кубики, отсюда пришли к призмам, а от них – к цилиндрам. Но в случае пирамиды и конуса «разбить» их на кубики не получится.

Хотя древние греки пробовали. В V веке до н. э. греческим математиком Демокритом было высказано предположение, что объем пирамиды равен трети объема призмы с тем же основанием и той же высотой. Доказать это не смог ни он, ни получивший позднее тот же результат Евклид. Впрочем, данная формула подтверждалась практикой – действительно, мы можем измерить объем любой конкретной пирамиды с любой степенью точности. Например, если взять пирамидку и заполнить ее чем-нибудь (водой, песком), а потом вычислить объем того, чем мы заполняли. Впрочем, ученые и по сей день пытаются разбить призму на три равных пирамиды, что доказало бы формулу.

### Практическая работа №51. Комбинация многогранников и тел вращения.

1. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.
2. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка А и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от А на 15 см. Найдите радиус этой окружности.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
5. Высота цилиндра 2 м. Радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.
6. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую L
7. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите высоту.
8. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при: 1)  $n = 3$ ;  
2)  $n = 4$ ; 3)  $n = 6$ .

### Объем пирамиды и усеченной пирамиды

В наши дни формула давно доказана. И сделано это с помощью интегралов. Помним, что  $V = \int_a^b S(x) dx$ , где  $S(x)$  – это площадь сечения фигуры плоскостью, перпендикулярной некоторой оси, которую мы провели.

С помощью этого метода выведем объем пирамиды. Начнем с объема треугольной пирамиды.

Рассмотрим пирамиду  $OABC$  ( $O$  – вершина), обозначим ее объем через  $V$ ; площадь ее основания  $S_{ABC} = S$ ; ее высота  $OH = h$  (см. Рис. 1).

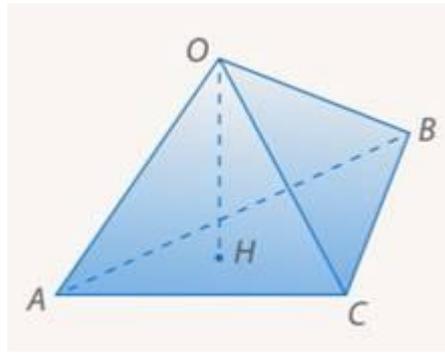


Рис. 1. Пирамида  $OABC$

Проведем ось  $OX$ , совпадающую с лучом  $OH$ . Рассмотрим произвольную точку  $M$  на этой оси внутри пирамиды. Через эту точку проведем сечение  $A_1B_1C_1$ , перпендикулярное нашей оси. Помним, что  $V = \int_0^h S(x) dx$ , где  $S(x)$  – площадь сечения  $A_1B_1C_1$  (см. Рис. 2). Выразим, чему равно  $S(x)$ .

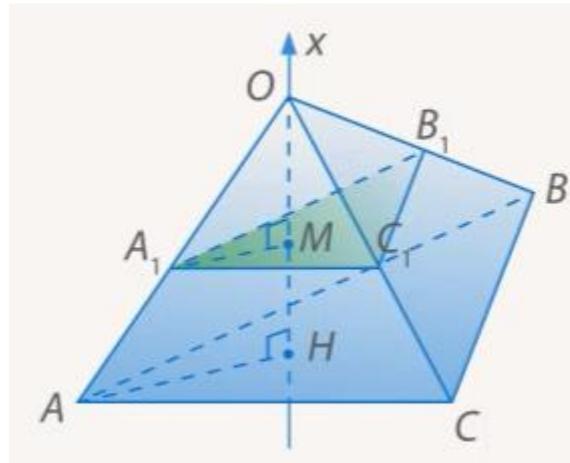


Рис. 2. Проведенные ось  $OX$  и перпендикулярное оси сечение  $A_1B_1C_1$

Заметим, что  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ : из того, что плоскости  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  перпендикулярны оси  $OX$ , следует, что плоскости параллельны, а значит,  $A_1C_1 \parallel AC$ ,  $B_1C_1 \parallel BC$  и  $A_1B_1 \parallel AB$ . Тогда получается, что  $\Delta A_1OC_1 \sim \Delta AOC$ ,  $\Delta B_1OC_1 \sim \Delta BOC$  и  $\Delta A_1OB_1 \sim \Delta AOB$ , откуда следует, что  $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$  (по третьему признаку подобия) (см. Рис. 3).

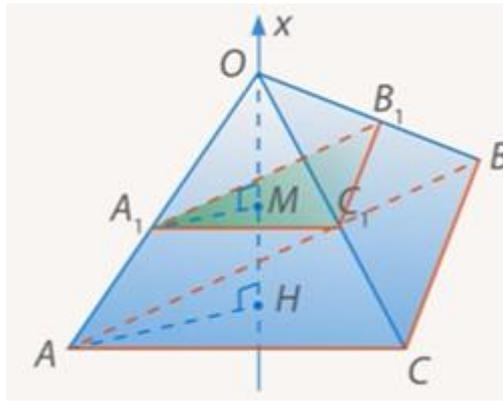


Рис. 3. Подобные треугольники

Найдем, чему равен коэффициент подобия  $k$ .

Рассмотрим  $\triangle AHO$  и  $\triangle A_1MO$ . Они подобны с тем же коэффициентом  $k$ , т. е.  $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM}{OH} = k$ , а значит,  $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM}{OH} = k$ . Из условия  $OH = h$ , и пусть  $MH = x$ , тогда  $OM = h - x$ . Получаем, что  $\frac{OM}{OH} = \frac{h-x}{h} = k$ .

Учитывая, что  $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$ , получаем  $\frac{S(x)}{S} = \frac{(h-x)^2}{h^2}$ ;  $S(x) = \frac{S(h-x)^2}{h^2}$ .

Окончательно,

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S(h-x)^2}{h^2} dx = S \int_0^h \frac{(x-h)^2}{h^2} d(x-h) = S \cdot \frac{(x-h)^3}{3h^2} \Big|_0^h = 0 - \left( -\frac{S \cdot h^3}{3h^2} \right) = \frac{Sh}{3}$$

Итак, мы доказали, что объем треугольной пирамиды  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

Осталось вывести формулу для произвольной пирамиды. Это делается просто: разбиваем произвольную пирамиду на треугольные (см. Рис. 4).

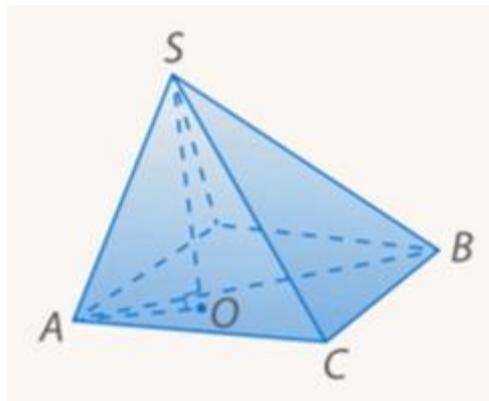


Рис. 4. Разбиение произвольной пирамиды на треугольные

Тогда

$$V_{\text{пр.пир.}} = V_{1 \text{ тр.пир.}} + V_{2 \text{ тр.пир.}} = \frac{S_1 \text{ осн.} \cdot h}{3} + \frac{S_2 \text{ осн.} \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_1 \text{ осн.} + S_2 \text{ осн.}) = \frac{1}{3} h \cdot S_{\text{пр.пир.}}$$

Итак, окончательно, теорема, которую мы доказали: объем пирамиды равен трети произведения площади ее основания и высоты

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

В качестве следствия можно доказать и формулу для вычисления объема усеченной пирамиды (см. Рис. 10):  $V_{\text{ус.пир.}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ , где  $h$  – высота усеченной пирамиды, а  $S_1$  и  $S_2$  – площади ее оснований.

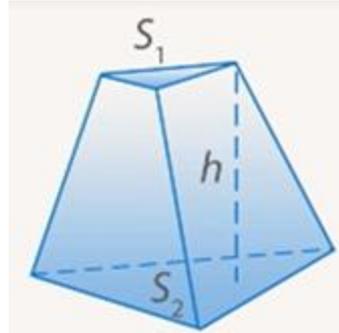


Рис. 10. Усеченная пирамида

Доказательство (без интеграла)

Докажем, что  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S \cdot h$ . Как и в первом доказательстве, мы докажем формулу для треугольной пирамиды, а как она обобщается до произвольной, вы уже знаете.

Пусть  $SABC$  – треугольная пирамида,  $S$  – вершина,  $\triangle ABC$  – основание (см. Рис. 5).

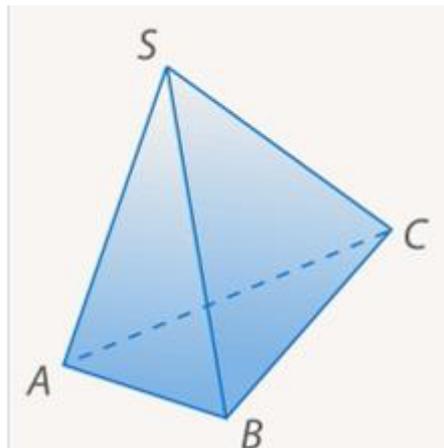


Рис. 5.  $SABC$  – треугольная пирамида

Дополним эту пирамиду до призмы с тем же основанием и высотой (см. Рис. 6).

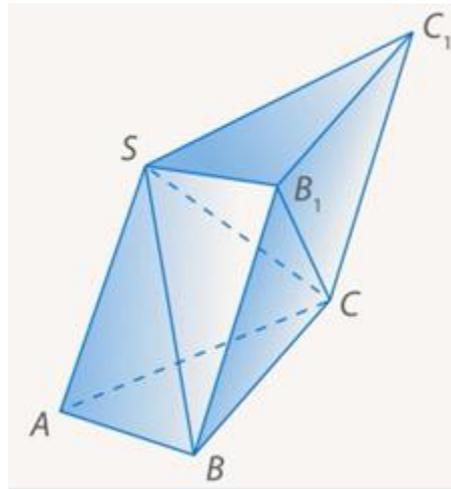


Рис. 6. Призма  $ABCB_1C_1$

Эта призма составлена из трех пирамид: данной  $SABC$ ,  $SBCB_1$  и  $SCC_1B_1$  (см. Рис. 7).

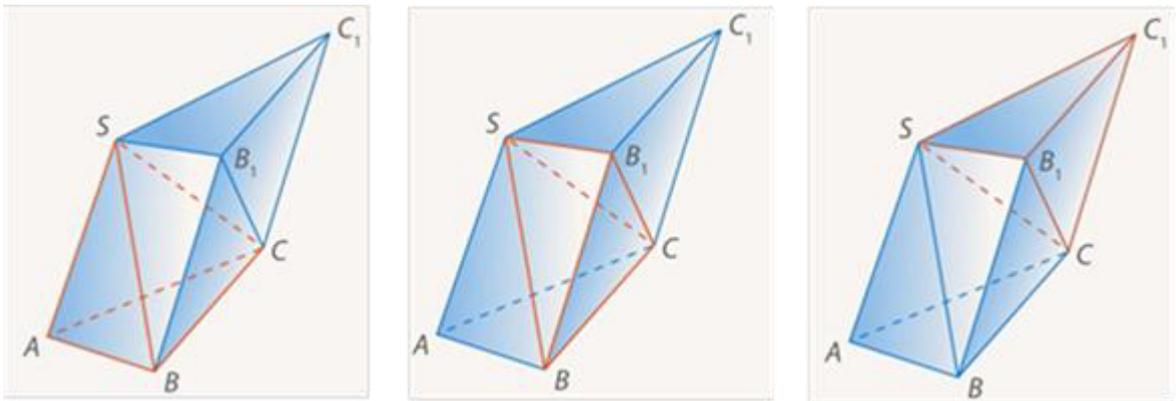


Рис. 7. Призма из трех пирамид

Рассмотрим исходную пирамиду  $ABCS$  и пирамиду  $BCSB_1$ . Заметим, что у них  $\Delta ASB = \Delta B_1BS$  (как треугольники, образовавшиеся при проведении диагонали  $SB$  в параллелограмме  $ASB_1B$ ). Высоты, проведенные из точки  $C$  на каждую из этих плоскостей, совпадают  $h_1 = h_2$  (см. Рис. 8).

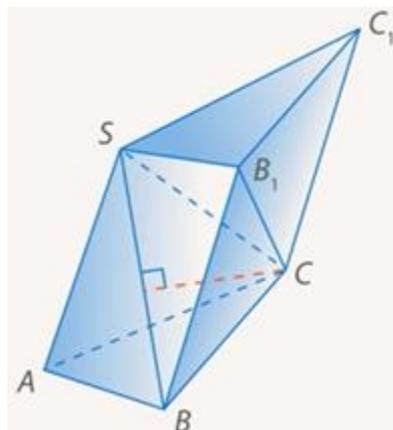


Рис. 8. Высота, проведенная к плоскости  $ASB_1B$

Раз у пирамид  $ABCS$  и  $BCSB_1$  равны высоты и основания, то равны и объемы  $V_{ABCS} = V_{BCSB_1}$  (следует из равенства объемов равновеликих тел).

Аналогично если рассмотреть пирамиды  $SCC_1B_1$  и  $SCBB_1$ , то  $V_{SCC_1B_1} = V_{SCBB_1}$ , т. к.  $\Delta CC_1B_1 = \Delta B_1BC$  (как треугольники, образовавшиеся при проведении диагонали  $B_1C$  в параллелограмме  $BB_1C_1C$ ). Высоты, проведенные из точки  $S$  на каждую из этих плоскостей, совпадают  $h_1 = h_2$  (см. Рис. 9). То есть площади оснований и высоты равны.

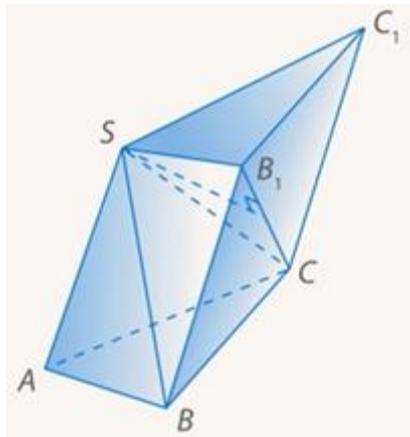


Рис. 9. Высота, проведенная к плоскости  $BB_1C_1C$

Получили, что все три пирамиды имеют один и тот же объем  $V_{SCC_1B_1} = V_{SCBB_1} = V_{ABCS}$ , то есть  $V_{\text{пр.}} = V_{SCC_1B_1} + V_{SCBB_1} + V_{ABCS} = 3V_{ABCS} = Sh$ , откуда  $V_{ABCS} = \frac{Sh}{3}$ . Теорема доказана.

### Объем усеченной пирамиды

Итак, пусть у усеченной пирамиды  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  основания имеют площади  $S_1, S_2$ ; высота –  $h$ . Достроим эту усеченную пирамиду до обычной пирамиды. Пусть  $O$  – вершина пирамиды. Опустим высоту, она пересечет основания в точках  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Пусть  $OM_2 = x$  (см. Рис. 11).

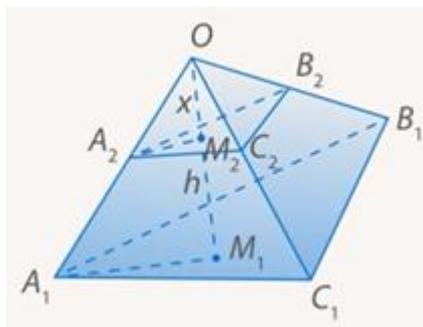


Рис. 11. Иллюстрация к условию

Заметим, что  $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$  и коэффициент подобия  $k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$  (обосновывалось ранее).

Тогда очевидно, что объем усеченной пирамиды равен разности объемов большой пирамиды и малой, то есть:

$$V = V_{O A_1 B_1 C_1} - V_{O A_2 B_2 C_2} = \frac{1}{3} S_1 (x + h) - \frac{1}{3} S_2 \cdot x$$

Осталось найти  $x$ .

Из того, что  $\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2$ , получаем  $\frac{A_1 M_1}{A_2 M_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$  (в силу того что это соответствующие отрезки подобных фигур, чьи площади нам известны).

С другой стороны,  $\Delta O M_2 A_2 \sim \Delta O M_1 A_1$  (было выведено ранее), тогда  $\frac{O M_1}{O M_2} = \frac{h+x}{x} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ .

$$\text{Значит, } (h+x)\sqrt{S_2} = x\sqrt{S_1}, \quad h = x\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - x, \quad x = \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left( S_1 \cdot \left( h + \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) - S_2 \cdot \frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{hS_1\sqrt{S_1} - hS_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} \cdot (S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}) = \frac{1}{3} h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \end{aligned}$$

в силу формулы разности кубов. Что и требовалось доказать.

### Пример 1

Закрепим выведенную формулу объема пирамиды примером.

Чему равен объем  $V$  правильной треугольной пирамиды  $SABC$ , если  $AB = 6$ ,  $AS = 4$ ? (См. Рис. 12.)

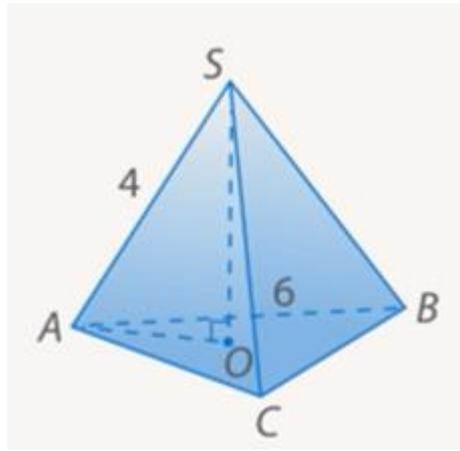


Рис. 12. Иллюстрация к задаче

Решение. Как мы знаем,  $V = \frac{1}{3} S \cdot h$ .

Поскольку в основании лежит правильный треугольник (см. Рис. 13),  
 то  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9 \sqrt{3}$ .

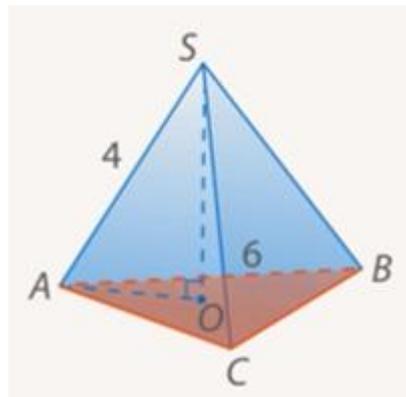


Рис. 13. Правильный треугольник в основании

Найдем высоту  $SO$  из прямоугольного треугольника  $\Delta SOA$ . Гипотенуза  $SA = 4$ , а катет  $OA$  – радиус описанной окружности, который равен  $\frac{a \sqrt{3}}{3}$ , то есть  $OA = \frac{6 \sqrt{3}}{3} = 2 \sqrt{3}$  (см. Рис. 14).

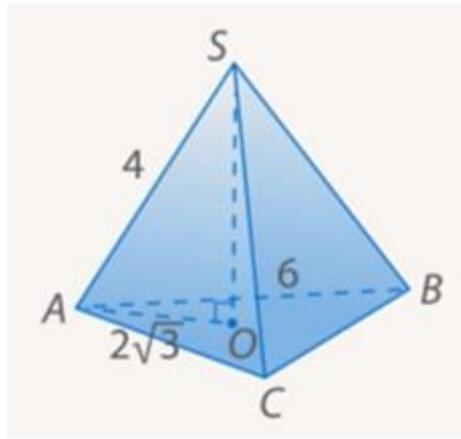


Рис. 14. Стороны  $\Delta SOA$

Отсюда по теореме Пифагора  $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$ . А значит, объем равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2 = 6\sqrt{3}$$

Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

### Объем конуса и усеченного конуса

Теорема. Объем конуса (см. Рис. 15) равен  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}Sh$ , где  $R$  – радиус основания конуса,  $h$  – его высота.

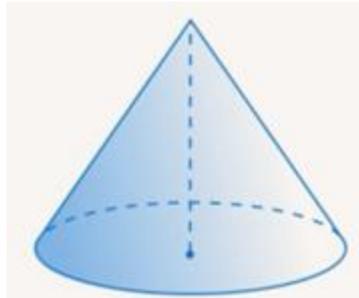


Рис. 15. Конус

Формула для вычисления объема конуса в точности совпадает с аналогичной формулой для пирамиды, так как конус – это, по сути, и есть пирамида, только в основании лежит «бесконечноугольник» – окружность (см. Рис. 16).

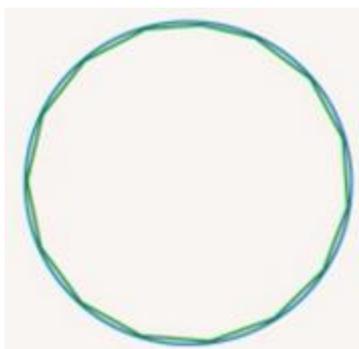


Рис. 16. Многоугольник, стремящийся к окружности

Если подставить в формулу объема пирамиды площадь основания конуса, то есть площадь круга, то мы и приходим к формуле  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ .

Доказывается же формула для конуса абсолютно аналогично пирамиде. Рассматривается такая же ось, отмечается точно такое же подобие, а дальше берется тот же самый интеграл (см. Рис. 17).

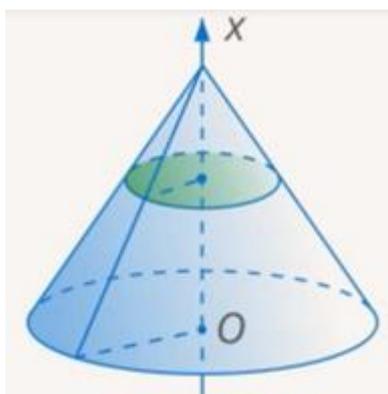


Рис. 17. Иллюстрация для доказательства формулы

Аналогичным выглядит и следствие про усеченный конус (см. Рис. 18):  $V_{\text{уск.}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$ . Доказательство абсолютно аналогично тому, что было приведено для усеченной пирамиды.

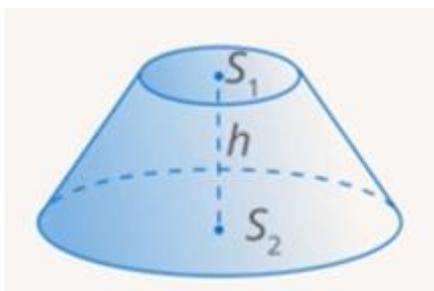
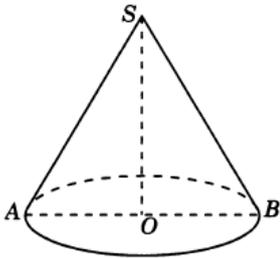


Рис. 18. Усеченная пирамида

Задание 1.

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите объем конуса.

В ответе запишите  $\frac{V}{\pi}$ .



Решение:

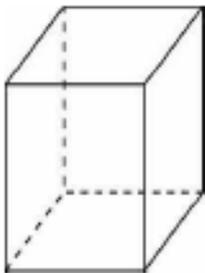
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$r = 6 \quad h = 8 \quad V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$$

Ответ: 96.

Задание 2.

Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 8. Найдите объем параллелепипеда.



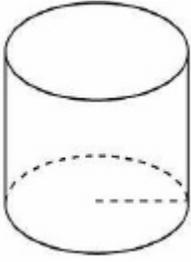
$V = a \cdot b \cdot c$  – формула с 5 класса

$$V = 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$$

Ответ: 160

Задание 3.

Радиус основания цилиндра равен 4, высота  $\frac{10}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра.



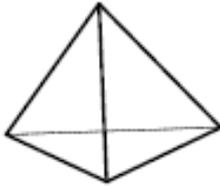
$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 160$$

Ответ: 160

Задание 4.

В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 9.



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

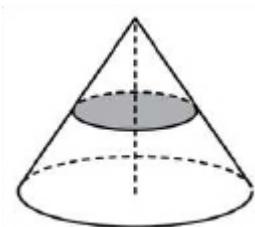
$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 18$$

Ответ: 18

Задание 5.

Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту конуса пополам. Найдите объем отсеченного конуса.



Способ 1.

Линейные размеры большого конуса  $r$  и  $h$ . Линейные размеры маленького конуса  $\frac{r}{2}$  и  $\frac{h}{2}$ .

$$\frac{1}{3}\pi r^2 = 12$$

$$\frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = V_M$$

Преобразуем:

$$\pi r^2 = 36$$

$$\frac{1}{24}\pi r^2 = V_M$$

Подставим:

$$\frac{1}{24} \cdot 36 = V_M$$

$$V_M = 1,5$$

Ответ: 1,5 - сложно

Способ 2.

Подсказка:

При изменении всех линейных размеров тела в  $k$  раз, объем этого тела изменяется в  $k^3$  раз.

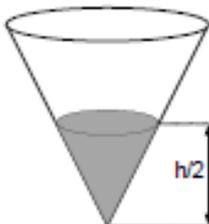
$$k = 2 \quad k^3 = 8 \quad V = \frac{12}{8} = 1,5$$

Ответ: 1,5

Данный прием решения задач не требует знания формулы объема конуса.

Задание 6.

Коническая воронка объемом 16 литров полностью заполнена жидкостью. Из воронки вычерпали часть жидкости, при этом ее уровень снизился до половины высоты воронки. Сколько литров жидкости вычерпали?



$$k = 2 \quad k^3 = 8 \quad V = \frac{16}{8} = 2$$

Найдем сколько литров жидкости вычерпали:

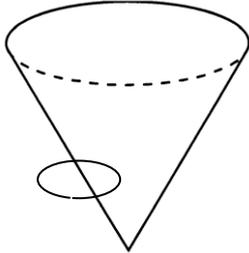
$$16-2=14$$

Ответ:14

Задание 7.

В сосуд в виде конуса налита жидкость до  $\frac{1}{4}$  высоты. Объем налитой жидкости равен

5. Сколько жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



$$k = 4 \quad k^3 = 64 \quad V = 64 \cdot 5 = 320$$

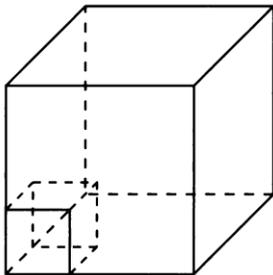
Найдем сколько жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху:

$$320-5=315$$

Ответ:315

Задание 8.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен 108. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в три раза?



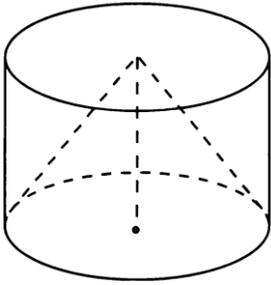
$$k = 3 \quad k^3 = 27 \quad V = \frac{108}{27} = 4$$

Ответ: 4

Задание 9.

Объем цилиндра равен 30. Чему равен объем конуса с таким же основанием и

высотой?



Подсказка:

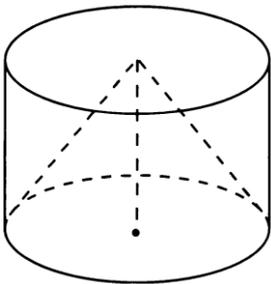
Если цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то  $V_k = \frac{1}{3}V_{\text{ц}}$

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

Ответ: 10

Задание 10.

Объём конуса равен 25. Чему равен объём цилиндра с таким же основанием и высотой?



$$25 = \frac{1}{3}V_{\text{ц}}$$

$$V_{\text{ц}} = 75$$

Ответ: 75

### Практическая работа №53 «Простейшие задачи в координатах»

Задание 1.

Составить уравнение сферы радиуса  $R = 5$  с центром в начале координат.

Задание 2.

Написать уравнение сферы с центром в точке  $C(2; -3; 5)$  и радиусом, равным 6.

Задание 3.

Найти центр и радиус сферы  $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100$ .

Задание 4

. Доказать, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$  является уравнением сферы.

Задание 5

Напишите уравнение прямой проходящей через две данные точки  $C(2;5)$  и  $D(5;2)$

### Практическая работа №54 «Решение задач с помощью координат»

Задание 1

На оси  $Ox$  найти точку, равноудаленную от точек  $A(2;-4;5)$  и  $B(-3;2;7)$ .

Задание 2

Найти косинус угла между векторами  $AB$  и  $AC$ .

$$A=(-4;4;4), B=(3;1;0), C=(-1;0;6).$$

Задание 3

Компланарны ли вектора  $a, b, c$ ?

$$a=(-3;2;1), b=(3;1;2), c=(3;-1;4)$$

Задание 4

Заданы два вектора в пространстве. Найти: а) их сумму; б) их разность; косинус угла между ними; в) их векторное произведение.  $a=(0;1;1), b=(-2;0;1)$ .

Задание 5

Найти ранг и базис системы векторов, перейти к новому базису. Записать разложения векторов по найденным базисам.

Задание 6

Компланарны ли вектора?

$$a^{\bar{}}=(-3;2;1), b^{\bar{}}=(3;1;2), c^{\bar{}}=(3;-1;4).$$

### Практическая работа №55 «Повторение изученного»

1. Найти угол между векторами .
2. Найдите угол  $ACB$  в треугольнике  $ABC$ .
3. Найти углы, составляемые вектором с координатными осями.

Вариант 1.

1. 2.  $A(2; -3;4)$ ;  $B(-2;3;7)$  и  $C(1;-2;-5)$ .

3. и В(9; -1;4).

Вариант 2.

1. 2. А(6;-1;2); В(8;-2;4) и С(-3;9;0).

3. и В(-2;3;5).

Вариант 3.

1. 2. А(9; -2;0); В(12;-3;5) и С(1;-2;6).

3. и В (-8; -2;3).

Вариант 4.

1. 2. А(7; -3;1); В(5;4;-2) и С(0;1;-5).

3. и В (4; -1;2).

Вариант 5.

1. 2. А(8;0; -3); В(-2;9;-7) и С(-3;-2;4).

3. и В (2;4; -1).

Вариант 6.

1. 2. А(2; -3;5); В(0;1;7) и С(4;-3;6).

3. и В (-3; -1;4).

Вариант 7.

1. 2. А(11; -1;5); В(10;0;4) и С(3;6;9).

3. и В (-6; -2;4).

Вариант 8.

1. 2. А(-4; -3;0); В(-11;2;-5) и С(0;-2;3).

3. и В(5;9;2).

Вариант 9.

1. 2. А(0;1;2); В(-2; 0;-1) и С(-3;-2;5).

3. и В(-3;5;8).

Вариант 10.

1. 2. А(2; -3;4); В(-2;0;7) и С(-3;-2;5).

3. и В(1;6;0).

Вариант 11.

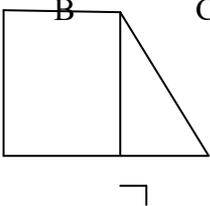
1. 2. А(2; -3;4); В(3;4;5) и С(-1;-2;0).

3. и В(5;0;10).

Вариант 12.

1. 2. А(9; -8;6); В(-2;0;7) и С(0;-2;6).

3. и В(8;4;0).

1 вариант	2 вариант	3 вариант
<p>Задание № 1</p> <p>На стороне ВС параллелограмма ABCD взята точка К так, что</p> $BK : KC = 1 : 4.$ <p>Выразите векторы AC, BK, CK, AK, KD через <math>AB = p</math> и <math>AD = k</math>. Выразите AS, если точка S – середина KD.</p> <p>Задание № 2</p> <p>В равнобедренной трапеции острые углы равны <math>45^{\circ}</math>, меньшее основание равно 5 см, а расстояние между основаниями 4 см. Найдите большее основание и среднюю линию трапеции.</p>	<p>Задание № 1</p> <p>На стороне НК ромба MNKC взята точка E так, что</p> $KE : NE = 1 : 6.$ <p>Выразите векторы CN, KE, NE, CE, EM через <math>CK = p</math> и <math>CM = q</math>. Выразите CD, если точка D – середина ME.</p> <p>Задание № 2</p> <p>В равнобедренной трапеции острые углы равны <math>60^{\circ}</math>, большая сторона равна 10 см, а большее основание 15 см. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции</p>	<p>Задание № 1</p> <p>В параллелограмме ABCD точка К – середина АВ, точка Р - середина ВС. Выразите векторы AC, ВD, АК, СР, СО, АР через векторы <math>AB = a</math>, <math>AD = b</math>.</p> <p>Задание № 2</p>  <p>ABCD – трапеция, <math>BC \parallel AD</math>,  <math>CD = 6</math> см, угол D равен <math>30^{\circ}</math>,  <math>BC = 4</math> см.      Найдите среднюю линию трапеции.</p>

### Список задач для самостоятельного решения

- Выяснить, каким числом (рациональным или иррациональным) является числовое значение выражения: 1)  $(\sqrt{8} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$ ; 2)  $(\sqrt{27} - 2)(2 - 3\sqrt{3})$ ; 3)  $(\sqrt{50} + 4\sqrt{2})\sqrt{2}$ ;
- Найти абсолютную погрешность приближения 0,55 числа  $\frac{5}{8}$
- Запишите число в стандартном виде. Укажите его порядок и округлите мантиссу до тысячных. 1) 735274; 2) 32465103; 3) 6,0054;
- Найдите значение выражения:  $(2^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} - 3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}) \cdot \sqrt[3]{6}$ .
- Вычислите:  $\frac{(0,216^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{2}}}{0,09^{\frac{3}{4}} \cdot 0,027^{\frac{1}{6}}}$
- Вычислите:  $2^3 \cdot 2^{-2} + 2^{-3} \cdot 2^2 + 1,25$ .
- Найдите значение выражения:  $\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}}\right)^{\frac{3}{4}}$  при  $x = 0,0625$
- Решить уравнения: 1)  $(x - 2)(x + 3) = 0$ ; 2)  $(x - 1)\sqrt{x + 4} = 0$ ;

9. Найдите корень уравнения: 1)  $(\frac{1}{4})^{x-3} = 64$ ; 2)  $(\frac{1}{7})^{x-3} = 49$ .
10. С какой процентной ставкой необходимо вложить деньги в банк, если через 2 года вкладчик хочет получить 120000 рублей при первоначальном взносе 100000 рублей?
11. Вычислить, используя определение и свойства логарифмов:  $5^{\log_5 16} - 11^{\log_{11} 12}$
12. Решите уравнение:  $\log_7(2x^2 - 7x + 6) - \log_7(x - 2) = \log_7 x$
13. Найдите значение выражения 1)  $3tg45^\circ - \sqrt{3}ctg60^\circ + 4\sin30^\circ$
14. Доказать тождество  $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
15. Вычислить  $\cos(\alpha + \beta)$ , если  $\cos\alpha = \frac{5}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,  $\cos\beta = -\frac{12}{13}$  и  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$
16. Преобразовать в произведение  $\sin 18^\circ + \sin 20^\circ$
17. Упростить выражение  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$
18. Вычислить 1)  $\cos 315^\circ + \sin 210^\circ + tg 420^\circ$ ;  
2)  $\sin \frac{13\pi}{6} - \cos \frac{11\pi}{6} + ctg \frac{11\pi}{4}$ .
19. Решить уравнение, разложив на множители его левую часть  $\sin x - \sin 3x = 0$
20. Решить неравенство 1)  $\cos x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 2)  $\sin 2x > \frac{1}{2}$
21. Вычислите  $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctg(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$
22. Решить уравнение  $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
23. Найти все решения уравнения на заданном отрезке  $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $[-6\pi; 6\pi]$
24. Найти область определения и область значений каждой из функций 1)  $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ; 2)  $y = 2 + \frac{4}{x-3}$
25. Найдите точки максимума и минимума функции ее максимумы и минимумы  $y = -x^2 + 6x - 8$
26. Выяснить, является ли, четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной функция: 1)  $y = x^3 - \frac{x}{2} + \sin x$ ; 2)  $y = x^2 + \cos 3x$ ;
27. Сколько различных двухзначных чисел с разными цифрами можно составить, используя цифры: 1) 1 и 5; 2) 0 и 6; 3) 2, 4 и 6; 4) 0, 1 и 8; 5) 3, 4, 5 и 6; 6) 0, 2, 3, 4 и 6?
28. Администрация города решила переименовать 3 улицы. К выбору были предложены 7 названий. Сколькими способами могут быть переименованы эти 3 улицы?
29. Сколькими способами можно разместить 6 различных автомобилей в семи одноместных боксах?

30. В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

31. Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

32. Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$  по известному закону ее распределения, заданному таблично:

X	8	4	6	5
P	0,2	0,5	0,2	0,1

33. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найти  $b_1$ , если  $q = 1/3$

34. Вычислить производную функции  $(12 - 7x)^3 \cdot (x^3 - 2x)^4$

35. С помощью производной найдите промежутки возрастания и убывания функции:  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ .

36. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x^3 + x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

37. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = \cos x$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = -\frac{\pi}{6}$  и  $x = \pi$

38. Найдите первообразную  $f(x) = 5e^{2x+3} + 4x^2$

39. Решить уравнение  $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

40. Решить систему уравнений  $\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0. \end{cases}$

41. Решите уравнение:  $\sqrt{2x - x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{-x - 2} + 1$

42. Решить неравенство  $\frac{1}{x^2 - 8x + 7} > \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 8x + 7}$

43. Изобразите расстояние и угол между скрещивающимися диагоналями параллельных граней куба.

44. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найти угол между прямыми  $A_1 D$  и  $D_1 E$ , где  $E$  - середина ребра  $CC_1$

45. Дана прямая и две точки  $A$  и  $B$ , расположенные по одну сторону от неё. Найдите на прямой такую точку  $C$ , чтобы треугольник  $ABC$  имел наименьший периметр.

46. Найдите объем цилиндра с высотой, равной 5 см, если диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол 45 градусов.

47. Площадь сечения шара плоскостью, проведенной через конец диаметра под углом  $60^\circ$  к нему, равна  $75\pi \text{ см}^2$ . Найдите площадь поверхности шара.

48. Найдите диаметр шара, объем которого равен  $36\pi \text{ см}^3$ .

49. Стороны треугольника равны 12 см и 9 см, а угол между ними  $30^\circ$ . найти площадь треугольника

50. Написать уравнение сферы с центром в точке  $C(2; -3; 5)$  и радиусом, равным 6.

**Проверка выполнения контрольных работ.** Контрольная работа проводится с целью результатов обучения и последующего анализа типичных ошибок и затруднений обучающихся в конце изучения темы или раздела. Согласно календарно-тематическому плану дисциплины предусмотрено проведение следующих контрольных работ:

- Контрольная работа №1 по разделу «Алгебра»
- Контрольная работа №2 по разделу «Основы тригонометрии»

- Контрольная работа №3 по разделу «Функции, их свойства и графики»
- Контрольная работа №4 по разделу «Комбинаторика»
- Контрольная работа №5 по разделу «Элементы теории вероятностей и статистики»
- Контрольная работа №6 по теме «Производная и ее применение»
- Контрольная работа №7 по теме «Интеграл и его применение»
- Контрольная работа №8 по разделу «Уравнения и неравенства»
- Контрольная работа №9 по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»
- Контрольная работа № 10 по разделу «Многогранники и круглые тела»

### Контрольная работа №1

#### Вариант 1

1. Запишите числа в виде бесконечных периодических дробей:  $\frac{7}{25}$ ,  $\frac{41}{30}$
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь: 1,(7); -5,3(23).
3. Вычисление:  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$
4. Вычислите:  $(2^3\sqrt{2})^6$
5. Вычислите:  $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$
6. Представьте в виде степеней с рациональным показателем  $\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}{x}$ .
7. Найдите значение выражений  $\sqrt{a^2} + \sqrt{16b^2} + 4b$  при  $a = -2000$ ,  $b = -3000$
8. Расположите числа в порядке возрастания  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ;  $9^{-\frac{1}{3}}$ ;  $3^{\frac{3}{4}}$ ;  $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$
9. Упростите выражение  $\frac{x-16}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+4}{x^{1,5}-1}$  и найдите его значение при  $x = 2,25$

#### Вариант 2

1. Запишите числа в виде бесконечных периодических дробей:  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{8}{15}$
2. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь: 4,(8); -2,6(93).
3. Вычислите:  $810000^{\frac{1}{4}}$
4. Вычислите:  $(-3\sqrt{2})^4$
5. Вычислите:  $\sqrt[4]{144} \cdot \sqrt[4]{9}$
6. Представьте в виде степеней с рациональным показателем  $\frac{\sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x}}}{x}$ .
7. Найдите значение выражений  $\sqrt{9a^2} + \sqrt{b^2} + 3a$  при  $a = -100$ ,  $b = -2000$
8. Расположите числа в порядке возрастания  $2^{-\frac{3}{4}}$ ;  $2$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $2^{\frac{2}{3}}$ ;  $2^{-\frac{4}{3}}$
9. Упростите выражение  $\frac{x-9}{x-x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}+1}$  и найдите его значение при  $x = 6,25$

#### Вариант № 1

1. Вычислить  $\log_3 81$
2. Вычислить  $\log_{169} 13$

3. Вычислить  $\log_4 \log_3 9$
4. Вычислить  $\frac{\lg 125}{\lg 5}$
5. Вычислить  $\log_6 12 - \log_6 3 + \log_6 9$
6. Вычислить  $2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$
7. Вычислить  $\log_3 2 - \log_3 2 \cdot \log_2 6 + \log_3 6$
8. Вычислить  $\lg 7(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6)$
9. Вычислить  $0,3^{2\log_{0,3} 4+2}$
10. Решите уравнение  $\log_5(7 - x) = 2$ .
11. Найдите корень уравнения  $\log_5(x - 1) = \log_5(2x - 3)$ .
12. Найдите корень уравнения  $2\log_5^2 x - 7\log_5 x + 3 = 0$ .
13. Найдите корень уравнения  $\log_3(7 - x) = \log_3(1 - x) + 1$
14. Найдите корень уравнения  $2\log_4(3x - 5) = \log_2(15 - x)$

**Вариант №2**

1. Вычислить  $\log_5 125$
2. Вычислить  $\log_{25} 5$
3. Вычислить  $\log_3 \log_4 64$
4. Вычислить  $\frac{\lg 256}{\lg 4}$
5. Вычислить  $\log_3 6 + \log_3 4 + \log_3 \frac{9}{24}$
6. Вычислить  $2\log_6 27 - \log_6 81 - 2\log_6 18$
7. Вычислить  $2\log_2 8 + \log_2 \frac{25}{16} - \log_2 25$
8. Вычислить  $\lg 3(\log_3 25 - \log_3 2 + \log_3 8)$
9. Вычислить  $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$
10. Решите уравнение  $\log_6(-3 + x) = 1$
11. Решите уравнение  $\log_6(x + 17) = \log_6(2x + 7)$
12. Решите уравнение  $\log_2(3x + 8) = \log_2(3 - x) + 1$
13. Решите уравнение  $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$
14. Решите уравнение  $\log_6(18 - x) = 4\log_{36} 2$

**Вариант №3**

1. Вычислить  $\log_4 \frac{1}{16}$
2. Вычислить  $\log_{81} 9$
3. Вычислить  $\log_2 \log_4 256$
4. Вычислить  $\frac{\lg 32}{\lg 2}$

5. Вычислить  $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$
6. Вычислить  $\log_2 10 - \log_2 5 + \log_2 8$
7. Вычислить  $2 \log_7 32 - \log_7 256 - 2 \log_7 14$
8. Вычислить  $\lg 2(\log_2 75 - \log_2 15 + \log_2 20)$
9. Вычислить:  $4^{\log_2 9} + 9$
10. Решите уравнение  $\log_7(-5 - x) = 3$
11. Решите уравнение  $\log_{17}(4x - 9) = \log_{17} x$
12. Решите уравнение  $2 \log_6^2 x + 5 \log_6 x + 2 = 0$ .
13. Решите уравнение  $\log_{26}(2x - 1) - \log_{26} x = 0$
14. Решите уравнение  $11^{\log_{11}(x+1)} = 2$ .

**Вариант №4**

1. Вычислить  $\log_5 \frac{1}{25}$
2. Вычислить  $\log_{121} 11$
3. Вычислить  $\log_5 \log_{32} 2$
4. Вычислить  $\frac{\lg 27}{\lg 3}$
5. Вычислить  $\log_5 10 + \log_5 50 - \log_5 4$
6. Вычислить  $\log_2 8 - \log_2 3 + \log_2 12$
7. Вычислить  $3 \log_2 4 + \log_2 \frac{15}{16} - \log_2 15$
8. Вычислить  $\lg 4(\log_4 35 + \log_4 2 - \log_4 7)$
9. Вычислить  $25^{\log_5 3 - \log_{25} 27}$
10. Решите уравнение  $\log_2(6 - x) = 5$
11. Найдите корень уравнения  $\log_2(x + 3) = \log_2(3x - 15)$
12. Решите уравнение  $\log_5 x = -\log_{0,2}(14 - x)$
13. Решите уравнение  $\log_6(x + 17) = \log_6(2x + 7)$
14. Решите уравнение  $3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 = 0$

**Контрольная работа №2**

**1 вариант**

1. а) перевести градусы в радианы:  $155^\circ$ ,  $55^\circ$  ;  
 б) перевести радианы в градусы  $\frac{2\pi}{7}$ ,  $\frac{\pi}{15}$ .
2. Найдите  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  и  $\alpha$  лежит во 2 четверти.
3. Вычислите:
  - а)  $\sqrt{3} \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{ctg} 135^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ$  ;
  - б)  $\cos \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ . в)  $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$

4. Решите уравнение:  $\sqrt{2} \sin 3x - 1 = 0$ .
5. Решите уравнение:  $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$
6. Упростите выражение:
- а)  $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin^2(-\alpha)}$ ,  $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
- б)  $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$     в)  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \sin(\pi - \alpha)}{\sin(\alpha + \pi)}$
- г)  $\sin(3\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha) - \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .
7. Решите уравнение:  $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$

### 2 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $175^\circ$ ,  $75^\circ$  ;  
 б) перевести радианы в градусы  $\frac{2\pi}{9}$ ,  $\frac{\pi}{12}$ .
2. Найти  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  и  $\alpha$  лежит в 3 четверти.
3. Вычислите:
- а)  $\sin 30^\circ + \sqrt{6} \cos 45^\circ \sin 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 150^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$ ;
- б)  $\cos \frac{\pi}{3} - \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ .    в)  $4 \sin^2 120^\circ - 2 \cos 600^\circ + \sqrt{27} \operatorname{tg} 660^\circ$ .

4. Решите уравнение:  $2 \cos 3x - \sqrt{2} = 0$ .
5. Решите уравнение:  $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$
6. Упростите выражение:
- а)  $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$ ,  $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;
- б)  $\sin(2\pi + \alpha) + \cos(\pi + \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .
- в)  $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ ;
- г)  $\frac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi + \alpha)}{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos(-\alpha)}$ .
7. Решите уравнение:  $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$

### 3 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $195^\circ$ ,  $95^\circ$  ;  
 б) перевести радианы в градусы  $\frac{3\pi}{7}$ ,  $\frac{2\pi}{15}$ .
2. Найдите  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  и  $\alpha$  лежит во 2 четверти.
3. Вычислите:
- а)  $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 30^\circ \sin 60^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ \operatorname{tg} 135^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ$ ;
- б)  $\sin \frac{\pi}{3} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ .    в)  $\cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right) - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ .

4. Решите уравнение:  $2\sin 3x - 1 = 0$ .
5. Решите уравнение:  $2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$ .
6. Упростите выражение:
- а)  $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$ ;
- б)  $\sin(\pi + \alpha) + \cos(2\pi + \alpha) - \sin(-\alpha) - \cos(-\alpha)$ .
- в)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ;
- г)  $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \sin(2\pi + \alpha)}{2\cos(\alpha)\sin(-\alpha) + 1}$ .
7. Решите уравнение:  $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$

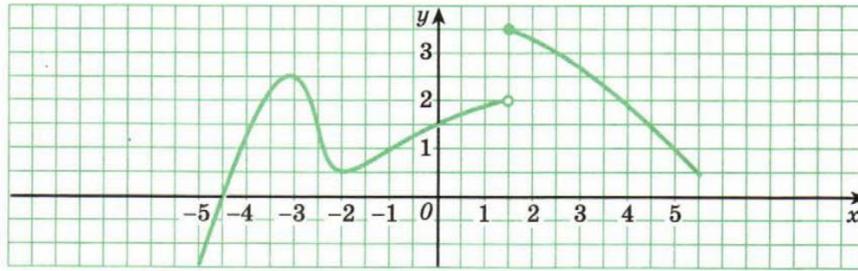
#### 4 вариант

1. а) перевести градусы в радианы:  $145^\circ$ ,  $15^\circ$  ;  
 б) перевести радианы в градусы  $\frac{5\pi}{9}$ ,  $\frac{\pi}{7}$ .
2. Найти  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$  и  $\alpha$  лежит в 3 четверти.
3. Вычислите:
- а)  $\cos 60^\circ - \sqrt{6} \cos 30^\circ \sin 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$ ;
- б)  $\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ . в)  $2\sin 870^\circ + \sqrt{12} \cos 570^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ$ .
4. Решите уравнение:  $2\cos 3x - 1 = 0$ .
5. Решите уравнение:  $2\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x - 2 = 0$ .
6. Упростите выражение:
- а)  $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\cos^2(-\alpha)}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$ .
- б)  $\sin(\pi - \alpha) + \cos(3\pi - \alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$ .
- в)  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin 2x}$
- г)  $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)$
7. Решите уравнение:  $\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5$

### Контрольная работа №3

#### Вариант 1

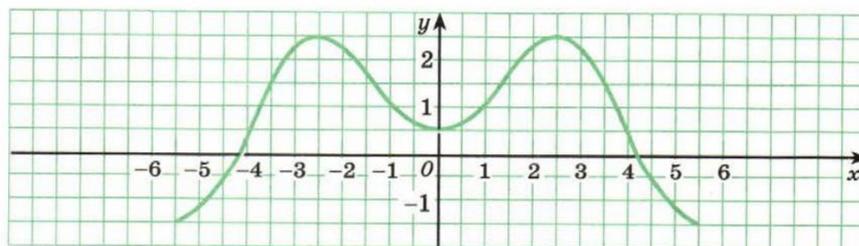
1. По графику функции ответьте на вопросы:
- 1) Каковы промежутки возрастания функции?
  - 2) Каковы промежутки убывания функции?
  - 3) Назовите точки максимума и минимума функции. Какие значения принимает функция в этих точках?
  - 4) Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке  $[-2; 2]$ ?
  - 5) В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?
  - 6) На каких промежутках функция непрерывна?
  - 7) Функция, изображенная на графике, является четной или нечетной?



2. Докажите четность (нечетность) функции: а)  $y = x^3 - 3x$ ; б)  $y = \frac{5x^3}{1-x^2}$ .
3. Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = (x-2)^3 - 1$ .
4. Найдите область определения функции:  $y = \frac{2}{\cos^2 x}$ .
5. Найдите область значений функции:  $y = 2\cos x \operatorname{tg} x$ .
6. В одной системе координат схематически постройте графики функций  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$  и  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
7. Решить уравнение: а)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-3x} = 25$ , б)  $4^x + 2^x - 20 = 0$ .

### Вариант 2

1. По графику функции ответьте на вопросы:
- 1) Каковы промежутки возрастания функции?
  - 2) Каковы промежутки убывания функции?
  - 3) Назовите точки максимума и минимума функции. Какие значения принимает функция в этих точках?
  - 4) Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке  $[-2; 2]$ ?
  - 5) В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?
  - 6) На каких промежутках функция непрерывна?
  - 7) Функция, изображенная на графике, является четной или нечетной?



2. Докажите четность (нечетность) функции: а)  $y = x^4(x^2 + 2)$ ; б)  $y = \frac{|x| + 2}{x^2}$
3. Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = 4 - (x+2)^4$ .
4. Найдите область определения функции:  $y = \frac{1}{1 + 2\sin 2x}$
5. Найдите область значений функции:  $y = 2 + 3\cos 5x$
6. В одной системе координат схематически постройте графики функций  $y = \log_4 x$  и  $y = 4^x$ .
7. Решить уравнение: а)  $0,1^{2x-3} = 10$ , б)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$ .

### Контрольная работа №4 Вариант 1

1. В ящике лежат 20 шариков, 12 из которых черные. Какова вероятность вытащить наугад:
  - а) черный шарик?
  - б) три черных шарика за один раз?
2. Дана выборка результатов внешнего оценивания по математике нескольких человек (в баллах): 167, 197, 167, 145, 145, 180, 150, 195, 167, 137. Составить таблицу распределения элементов выборки по частотам и относительным частотам. Найти моду, медиану, среднее значение выборки. Построить полигон частот.
3. В коробке лежат карточки, на которых записаны буквы слова ОСНОВАТЕЛЬНОСТЬ. Какова вероятность того, что наугад взятой карточке будет записана буква: а) О; б) согласная буква?
4. Найдите  $A \cup B$  и  $A \cap B$ , если  $A = \{2; 3; 7\}$ ,  $B = \{5; 7; 3\}$
5. В коробке лежат 4 голубых, 3 красных, 9 зеленых и 6 желтых шариков. Какова вероятность того, что выбранный шарик будет не зеленый?
6. Какова вероятность того, что при подбрасывании игральной кости выпадет не более трех очков?
7. На десяти карточках записаны натуральные числа от 1 до 10. Наугад берут две из них. Какова вероятность того, что модуль разности чисел на карточках равен 3?
8. Решить уравнение:  $C_x^2 = 153$

### **Вариант 2**

1. В вазе лежат 15 конфет, пять из которых шоколадные. Какова вероятность вытащить наугад: а) шоколадную конфету? б) три шоколадные конфеты за один раз?
2. Дана выборка количества новорожденных в городе А на протяжении нескольких дней: 56, 45, 51, 46, 48, 50, 46, 48, 49, 51. Найти моду, медиану, среднее значение выборки. Построить полигон частот.
3. В коробке лежат 30 карточек, на которых записаны числа от 1 до 30. Какова вероятность того, что наугад взятой карточке будет записано число, которое: а) кратно 7; б) не кратно ни числу 2, ни числу 3, ни числу 5?
4. Найдите  $A \cup B$  и  $A \cap B$ , если  $A = \{2; 3; 7\}$ ,  $B = \{5; 7; 3\}$
5. Мальчик забыл последнюю цифру семизначного номера телефона друга. Какова вероятность того, что он набрал верный номер.
6. Бросают игральную кость один раз. Какова вероятность того, что выпадет число, не меньше двух?
7. На карточках записаны числа от 1 до 12. Наугад берут две из них. Какова вероятность того, что сумма чисел на карточках будет равна 12?
8. Решить уравнение:  $A_x^2 = 20$

## **Контрольная работа №5**

### **Вариант 1**

**A1.** Случайная величина  $X$  принимала значения: 1, 0, 4, 3, 1, 5, 3, 2, 4, 3. Составьте таблицу распределения значений случайной величины  $X$  по частотам ( $M$ ) и относительным частотам ( $W$ ). Постройте полигон относительных частот значений величины  $X$ .

**A2.** Найдите моду, медиану, среднее и размах выборки значений случайной величины:

а) 3, 5, 6, 4, 4, 5, 2, 4, 3;

б) 7, 4, 6, 5, 6, 7, 5, 6;

в) 3,5; 3,8; 4,1; 2,8; 3,7; 4,4; 2,9.

**B1.** В таблице записаны размеры обуви 20 девочек IX класса:

34	34	35	35	35	36	36	36	36	36
37	37	37	37	37	38	38	39	39	39

Построить таблицы распределения частот и относительных частот. Построить полигон частот.

**В2.** Отмечая время (с точностью до минут), которое токари бригады затратили на обработку одной детали, получили такой ряд данных: 30, 32, 32, 38, 36, 31, 32, 38, 35, 36, 32, 40, 42, 36, 33, 35, 32, 40, 38. Составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины. Найдите размах, среднее, моду и медиану для данного ряда.

**С1.** Найти дисперсию выборки: 23, 29, 25, 26, 22.

### *Вариант 2*

**А1.** Случайная величина  $X$  принимала значения: 2, 1, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 3, 4. Составьте таблицу распределения значений случайной величины  $X$  по частотам ( $M$ ) и относительным частотам ( $W$ ). Постройте полигон частот значений величины  $X$ .

Постройте полигон частот значений величины  $X$ .

**А2.** Найдите моду, медиану, среднее и размах выборки значений случайной величины:

а) 7, 4, 6, 5, 6, 7, 5, 6;

б) 3, 5, 6, 4, 4, 5, 2, 4, 3;

в) 34, 35, 34, 37, 38, 37, 37.

**В1.** В таблице записаны рост 20 девочек IX класса:

153	153	154	154	154	154	155	155	155	155
155	156	156	157	157	157	158	158	159	160

Построить таблицы распределения частот и относительных частот. Построить полигон частот.

**В2.** В организации вели ежедневный учёт поступивших в течение месяца писем. В результате получили такой ряд данных: 39, 43, 40, 0, 56, 38, 24, 21, 35, 38, 0, 58, 31, 49, 38, 25, 34, 0, 52, 40, 42, 40, 39, 54, 0, 64, 44, 50, 38, 37, 32. Составить таблицы распределения по частотам и относительным частотам значений случайной величины. Найдите размах, среднее, моду и медиану для данного ряда.

**С1.** Найти дисперсию выборки: 23, 29, 25, 26, 22.

### **Контрольная работа №6** *Вариант 1*

1. Найти производную функции

а)  $x^8$ ;      б)  $x^{-11}$ ;      в)  $x^{\frac{2}{3}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$ ;      д)  $(1-3x)^4$ ;      е)  $(-5x)^3$ .

2. Найти  $f'(x_0)$

а)  $f(x) = \sqrt{3-2x}$ ,  $x_0 = -11$ ;      б)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3x^2$ ,  $x_0 = \frac{1}{4}$ .

3. Найти производную функции

а)  $x^3 + \frac{1}{x} - 1$ ;      б)  $(x+7) \cdot x^2$ ;      в)  $\frac{2x+3}{2-3x}$ .

4. Найти производную функции

а)  $e^x + \sin x$ ;      б)  $\cos x - \log_5 x$ ;      в)  $3^{2x+1}$ ;      г)  $\cos(x^2 - 3)$ .

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ .

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$  на отрезке  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ .

### Вариант 2

1. Найти производную функции

а)  $x^9$ ;      б)  $x^{-12}$ ;      в)  $x^{\frac{4}{5}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$ ;      д)  $(2-5x)^4$ ;      е)  $(-2x)^5$

2. Найти  $f'(x_0)$

а)  $f(x) = \sqrt{1-5x}$ ,  $x_0 = -3$ ;      б)  $f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{10x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{9}$ .

3. Найти производную функции

а)  $x^2 - \frac{1}{x} + 3$ ;      б)  $(x-6) \cdot x^3$ ;      в)  $\frac{2x+3}{3-2x}$ .

4. Найти производную функции

а)  $\cos x + 3^x$ ;      б)  $\ln x - \sin x$ ;      в)  $2^{3x-1}$ ;      г)  $\sin(x^3 + 2)$ .

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ .

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$  на отрезке  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ .

### Контрольная работа №7

#### Вариант 1

1. Показать, что функция  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$  на всей числовой прямой

а)  $F(x) = \frac{x^4}{4}$ ,  $f(x) = x^3$ ;      б)  $F(x) = \frac{2}{5}x^5$ ,  $f(x) = 2x^4$ .

2. Найти все первообразные данной функции

а)  $3x^3 - 4x^2$ ;      б)  $\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}$ ;      в)  $2\sin x + x^2$ ;      г)  $4e^x + x^3$ ;

3. Для функции  $f(x)$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M$ .

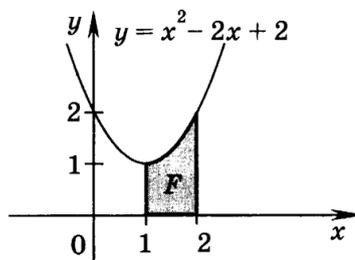
a)  $f(x) = -\frac{1}{x^3}, M(1; -2);$

б)  $f(x) = \sin x - \cos x, M(\frac{\pi}{2}; 1).$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=a, x=b$ , графиком функции  $y=f(x)$  и осью  $Ox$ :  $a=0, b=2, f(x)=x^2-2x+2$ .

5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:  $y=3x+18-x^2, y=0$ .

6. Вычислить площадь фигуры  $F$ , изображенной на рисунке.



### Вариант 2

1. Показать, что функция  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$  на всей числовой прямой

a)  $F(x) = 2x^5, f(x) = 10x^4;$

б)  $F(x) = \frac{x^6}{3}, f(x) = 2x^5.$

2. Найти все первообразные данной функции

a)  $2x^4 - 5x;$  б)  $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^4};$  в)  $3\cos x - x;$  г)  $5e^x - 2x^4;$

3. Для функции  $f(x)$  найти первообразную, график которой проходит через точку  $M$ .

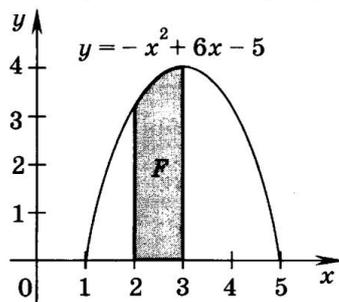
a)  $f(x) = \frac{2}{x^4}, M(2; -1);$

б)  $f(x) = \cos x + \sin x, M(\pi; -2).$

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x=a, x=b$ , графиком функции  $y=f(x)$  и осью  $Ox$ :  $a=1, b=3, f(x)=x^2-4x+5$ .

5. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:  $y=5x+14-x^2, y=0$ .

6. Вычислить площадь фигуры  $F$ , изображенной на рисунке.



### Контрольная работа №8

#### Вариант 1

1. Решить неравенство:

a.  $\frac{30x-9}{x-2} \geq 25(x+2)$

b.  $\frac{4x-x^2}{3+2x} \leq 0$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{x+8} - x + 2 = 0$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{x^2 - x - 2} \geq x - 1$

4. Решить показательное и логарифмическое уравнение:

a.  $\log_3(2x+1) = \log_3 13 + 1$

b.  $4^{3x} + 2 = 9 * 2^{3x}$

5. Решить показательное неравенство:

a.  $3 \cdot 2^{2x+3} < 0,25$       b.  $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \geq 36$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $\log_5(4x+1) > -1$

7. Решить систему уравнений:

a.  $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2x + y = \log_3 135 - \log_3 5 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$

### Вариант 2

1. Решить неравенство:

a.  $x > \frac{1}{x-1}$       b.  $\frac{4x-9x^2}{10-x} \geq 0$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{2x^2 - 4x} = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{x+3} > x+1$

4. Решить показательное уравнение:

a.  $9 \cdot 81^{1-2x} = 27^{2-x}$       b.  $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} = 4$

5. Решить показательное неравенство:

a.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2+4x} \geq 0,75^{1-8x}$       b.  $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 < 0$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $2 \lg 6 - \lg x > 3 \lg 2$

7. Решить систему уравнений:

a.  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} \end{cases}$       b.  $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$

### Вариант 3

1. Решить неравенство:

a.  $\frac{4x^2+8x-5}{x+1} < 0$       b.  $\frac{(x-5)(2x+7)}{4-x} \geq 0$

2. Решить иррациональное уравнение:  $4\sqrt{x+1} = 2x+2$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$

4. Решить показательное и логарифмическое уравнение:

a.  $0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} = 0,7$       b.  $-\log_7(5-x) = \log_7 2 - 1$

5. Решить показательное неравенство:

a.  $2^{x-1} + 2^x \geq 2^{x+1} - 4$       b.  $3^{2x-1} + 3^{2x} < 108$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $2 \lg 6 - \lg x > 3 \lg 2$

7. Решить систему уравнений:

a.  $\begin{cases} 2x + y = 15, \\ x - 3y = \log_2 144 - \log_2 9 \end{cases}$       b.  $\begin{cases} 3(x+1) + 2(y-2) = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

### Вариант 4

1. Решить неравенство:

a.  $x + 2 < \frac{4}{1-x}$

b.  $\frac{3x^2+4x-4}{8+15x} < 0$

2. Решить иррациональное уравнение:  $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$

3. Решить иррациональное неравенство:  $\sqrt{4x - 8} \geq x - 5$

4. Решить показательное уравнение:

a.  $2^x + 2^{x+2} = 20$

b.  $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$

5. Решить показательное неравенство:

a.  $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$

b.  $8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \geq 0$

6. Решить логарифмическое неравенство:  $\log_5(4x+1) > -1$

7. Решить систему уравнений:

a.  $\begin{cases} 2y - x = 6, \\ 9^{2x+y} = 3^{2-3y} \end{cases}$

b.  $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$

### Контрольная работа №9

#### I вариант

№1. Основание  $AD$  трапеции  $ABCD$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно.

а) Каково взаимное положение прямых  $EF$  и  $AB$ ?

б) Чему равен угол между прямыми  $EF$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 150^\circ$ ? Поясните ответ.

№2. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть:

а) параллельными; б) скрещивающимися?

Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

№3. Через точку  $O$ , лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно,

прямая  $m$  – в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_2B_2$ , если  $A_1B_1 = 12$  см,

$$B_1O : OB_2 = 3 : 4.$$

№4. Диагональ куба равна 6 см. Найдите:

а) ребро куба;

б) косинус угла между диагоналями куба и плоскостью одной из его граней.

№5. Из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$  проведены наклонные  $AB$  и  $AC$ , образующие с плоскостью  $\alpha$  равные углы. Известно, что  $BC = AB$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

#### II вариант

№1. Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону  $AC$ . Точка  $P$  – середина стороны  $AD$ , а  $K$  – середина стороны  $DC$ .

а) Каково взаимное положение прямых  $PK$  и  $AB$ ?

б) Чему равен угол между прямыми  $PK$  и  $AB$ , если  $\angle ABC = 40^\circ$  и  $\angle BCA = 80^\circ$ ? Поясните ответ.

№2. Прямые  $a$  и  $b$  лежат в пересекающихся плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Могут ли эти прямые быть:

- а) параллельными; б) скрещивающимися?

Сделайте рисунок для каждого возможного случая.

№3. Через точку  $O$ , не лежащую между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , проведены прямые  $l$  и  $m$ . Прямая  $l$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, прямая  $m$  – в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $A_2B_2 = 15$  см,

$$OB_1 : OB_2 = 3 : 5.$$

№4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат; диагональ

параллелепипеда равна  $2\sqrt{6}$  см, а его измерения относятся как 1:12 Найдите:

а) измерения параллелепипеда;

б) синус угла между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

№5. Из точки  $A$  к плоскости проведены перпендикуляр  $AO$  и две равные наклонные  $AB$  и  $AC$ . Известно, что  $BC = BO$ . Найдите углы треугольника  $BOC$ .

### Контрольная работа №10

#### Вариант 1

1. Основанием для прямой призмы является равнобедренная трапеция, длины боковых сторон которой равны по 13 см, основания 11 см и 21 см, площадь диагонального сечения призмы равна  $180$  см<sup>2</sup>. Найдите высоту призмы.

- А. 16 см.      Б. 12 см.      В. 9 см.

2. Точка  $M$  удалена от каждой вершины квадрата на 10 см. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости квадрата, если его сторона равна  $6\sqrt{2}$  см.

- А. 8 см.      Б. 9 см.      В. 10 см.

3. Через точку пересечения диагоналей ромба  $ABCD$  проведен к его плоскости перпендикуляр  $MO$  длиной 12 см. Диагонали ромба равны 18 см и 10 см. Найдите длину большей наклонной.

- А. 15 см.      Б. 12 см.      В. 10 см.

4. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как  $\pi\sqrt{3} : 4$ . Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.

- А.  $60^\circ$ .      Б.  $45^\circ$ .      В.  $30^\circ$ .

5. Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в  $60^\circ$ , если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол  $30^\circ$ .

- А.  $100$  см<sup>2</sup>.      Б.  $200$  см<sup>2</sup>.      В.  $500$  см<sup>2</sup>.

6. Найдите объем куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , если  $DE = 1$  см, где  $E$  – середина ребра  $AB$ .

- А.  $\frac{8}{\sqrt{5}}$  см<sup>3</sup>.      Б.  $\frac{8}{5\sqrt{5}}$  см<sup>3</sup>.      В.  $1,5$  см<sup>3</sup>.

7. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна  $288\pi$  см<sup>2</sup>. Найдите радиус основания цилиндра.

- А. 6 см.      Б. 9 см.      В. 16 см.

8. В цилиндр вписана правильная  $n$ -угольная призма. Найти отношение объемов призмы и цилиндра, если  $n = 4$ .

- А.  $\frac{2}{\pi}$ .      Б. 5.      В.  $\frac{4}{3\pi}$ .

9. Основанием пирамиды  $DABC$  является прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого гипотенуза  $AB$  равна 29 см, катет  $AC$  равен 21 см. Ребро  $DA$  перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

- А.  $580 \text{ см}^2$ .      Б.  $650 \text{ см}^2$ .      В.  $790 \text{ см}^2$ .

**Вариант 2**

1. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $30^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания  $\sqrt{2}$  см.

- А.  $2 \text{ см}^3$ .      Б.  $4 \text{ см}^3$ .      В.  $5\sqrt{2} \text{ см}^3$ .

2. Из точки  $A$  проведены к плоскости наклонные  $AB$  и  $AC$  длиной  $12 \text{ см}$  и  $18 \text{ см}$ . Найдите длины проекций наклонных, если одна из них на  $10 \text{ см}$  больше другой.

- А.  $14 \text{ см}$  и  $4 \text{ см}$ .      Б.  $6 \text{ см}$  и  $9 \text{ см}$ .      В.  $10 \text{ см}$  и  $20 \text{ см}$ .

3. Из точки  $M$  к плоскости проведены наклонные  $MA$  и  $MB$  длиной  $10 \text{ см}$  и  $17 \text{ см}$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости, если длины проекций пропорциональны числам  $2$  и  $5$ .

- А.  $6 \text{ см}$ .      Б.  $7 \text{ см}$ .      В.  $8 \text{ см}$ .

4. Диагональ осевого сечения цилиндра равна  $48 \text{ см}$ . Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен  $60^\circ$ . Найдите радиус цилиндра.

- А.  $12 \text{ см}$ .      Б.  $12\sqrt{3} \text{ см}$ .      В.  $14 \text{ см}$ .

5. Высота конуса равна  $8 \text{ дм}$ . На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

- А.  $2\sqrt{3} \text{ дм}$ .      Б.  $5 \text{ дм}$ .      В.  $4\sqrt{2} \text{ дм}$ .

6. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром  $18 \text{ м}$  и высотой  $7 \text{ м}$ , если плотность нефти  $0,85 \text{ г/см}^3$ ?

- А.  $1513 \text{ т}$ .      Б.  $900 \text{ т}$ .      В.  $2408 \text{ т}$ .

7. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна  $8 \text{ см}$  и составляет с боковым ребром угол в  $30^\circ$ . Найдите объем призмы.

- А.  $72 \text{ см}^3$ .      Б.  $64 \text{ см}^3$ .      В.  $60 \text{ см}^3$ .

8. Равнобедренная трапеция, основания которой равны  $6 \text{ см}$  и  $10 \text{ см}$ , а острый угол  $60^\circ$ , вращается вокруг большего основания. Вычислите площадь поверхности полученного тела.

- А.  $40 \text{ см}^2$ .      Б.  $40\sqrt{3} \text{ см}^2$ .      В.  $150 \text{ см}^2$ .

9. В цилиндр вписана правильная  $n$ -угольная призма. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра, если  $n = 3$ .

- А.  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ .      Б.  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .      В.  $\frac{3\pi}{7}$ .

**Вариант 3**

1. Основание прямой призмы - треугольник со сторонами  $5 \text{ см}$  и  $3 \text{ см}$  и углом, равным  $120^\circ$ , между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна  $35 \text{ см}^2$ . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

- А.  $42 \text{ см}^2$ .      Б.  $75 \text{ см}^2$ .      В.  $108 \text{ см}^2$ .

2. Основанием пирамиды  $DABC$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = AC$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ , высота  $AH = 9 \text{ см}$ . Известно также, что  $DA = DB = DC = 13 \text{ см}$ . Найдите высоту пирамиды.

- А.  $12 \text{ см}$ .      Б.  $13 \text{ см}$ .      В.  $16 \text{ см}$ .

3. Точка  $M$  одинаково удалена от всех вершин правильного треугольника  $ABC$  и от его плоскости на  $6 \text{ см}$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до вершин треугольника, если его сторона равна  $8\sqrt{3} \text{ см}$ .

- А.  $8 \text{ см}$ .      Б.  $10 \text{ см}$ .      В.  $12 \text{ см}$ .

4. Отрезок  $AD$  перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = AC = 5 \text{ см}$ ,  $BC = 6 \text{ см}$ ,  $AD = 12 \text{ см}$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до отрезка  $BC$ .

- А.  $6,5 \text{ см}$ .      Б.  $10\sqrt{3} \text{ см}$ .      В.  $4\sqrt{10} \text{ см}$ .

5. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна  $6 \text{ дм}^2$ , а площадь основания равна  $8 \text{ дм}^2$ .

А.  $6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ .      Б.  $8\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ .      В.  $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ .

6. Диаметр Луны составляет (приблизительно) четвертую часть диаметра Земли. Найдите отношение объемов Луны и Земли, считая их шарами.

А.  $\frac{1}{64}$ .      Б.  $\frac{1}{16}$ .      В.  $\frac{1}{8}$ .

7. Найдите образующую усеченного конуса, если радиусы оснований  $3 \text{ см}$  и  $6 \text{ см}$ , а высота  $4 \text{ см}$ .

А.  $4 \text{ см}$ .      Б.  $5 \text{ см}$ .      В.  $6,5 \text{ см}$ .

8. Равнобедренная трапеция, основания которой равны  $6 \text{ см}$  и  $10 \text{ см}$ , а острый угол  $60^\circ$ , вращается вокруг большего основания. Найдите объем тела вращения.

А.  $48\pi \text{ см}^3$ .      Б.  $100\pi + 6 \text{ см}^3$ .      В.  $120\pi \text{ см}^3$ .

9. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами  $12 \text{ см}$ ,  $10 \text{ см}$ ,  $10 \text{ см}$ . Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

А.  $48 \text{ см}^2$ .      Б.  $48\sqrt{3} \text{ см}^2$ .      В.  $48\sqrt{2} \text{ см}^2$ .

#### Вариант 4

1. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник со стороной  $6 \text{ см}$ , а диагональ боковой грани  $10 \text{ см}$ . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

А.  $2 \text{ см}^2$ .      Б.  $2\sqrt{2} \text{ см}^2$ .      В.  $4 \text{ см}^2$ .

2. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами  $6 \text{ см}$  и  $8 \text{ см}$ . Высота пирамиды равна  $12 \text{ см}$  и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

А.  $12 \text{ см}$ .      Б.  $13 \text{ см}$ .      В.  $13\sqrt{2} \text{ см}$ .

3. Через вершину  $B$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $BM$ , перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны ромба, если  $AB = 25 \text{ см}$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $BM = 12,5 \text{ см}$ .

А.  $12,5 \text{ см}$  и  $25 \text{ см}$       Б.  $13 \text{ см}$  и  $25 \text{ см}$ .      В.  $12,5 \text{ см}$  и  $24 \text{ см}$ .

4. Высота цилиндра равна  $10 \text{ дм}$ . Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на  $9 \text{ дм}$  от нее, равна  $240 \text{ дм}^2$ . Найдите радиус цилиндра.

А.  $15 \text{ дм}$ .      Б.  $15,5 \text{ дм}$ .      В.  $15\sqrt{2} \text{ дм}$ .

5. Площадь осевого сечения конуса равна  $0,6 \text{ см}^2$ . Высота конуса равна  $1,2 \text{ см}$ . Найдите площадь полной поверхности конуса.

А.  $1,5\pi \text{ см}^2$ .      Б.  $0,9\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$ .      В.  $0,9\pi \text{ см}^2$ .

6. Найдите образующую усеченного конуса. Если радиусы оснований равны  $3 \text{ см}$  и  $6 \text{ см}$ , а высота равна  $4 \text{ см}$ .

А.  $5,5 \text{ см}$ .      Б.  $5 \text{ см}$ .      В.  $5\sqrt{2} \text{ см}$ .

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $18 \text{ см}$  и составляет угол в  $30^\circ$  с плоскостью боковой грани и угол в  $45^\circ$  с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.

А.  $729\sqrt{2} \text{ см}^2$ .      Б.  $729 \text{ см}^3$ .      В.  $729\sqrt{2} \text{ см}^3$ .

8. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой  $\beta$ . Найдите  $\beta$ , если высота конуса равна  $4 \text{ см}$ , а радиус основания равен  $3 \text{ см}$ .

А.  $230^\circ$ .      Б.  $250^\circ$ .      В.  $216^\circ$ .

9. Сколько понадобится краски, чтобы покрасить бак цилиндрической формы с диаметром основания  $1,5 \text{ м}$  и высотой  $3 \text{ м}$ , если на  $1 \text{ м}^2$  расходуется  $200 \text{ г}$  краски.

А.  $1,125\pi \text{ кг}$ .      Б.  $1,5\pi \text{ кг}$ .      В.  $1\frac{3}{8}\pi \text{ кг}$

Ответы:	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
<b>Вариант 1</b>	В	А	А	В	Б	Б	А	А	В
<b>Вариант 2</b>	Б	А	В	Б	В	А	А	Б	А
<b>Вариант 3</b>	Б	А	Б	В	А	А	Б	В	В
<b>Вариант 4</b>	А	В	А	А	В	Б	В	В	А

**Сводная таблица по применяемым формам и методам текущего контроля и оценки результатов обучения**

<b>Результаты обучения</b>	<b>Формы и методы контроля и оценки результатов обучения</b>
<b>ЛИЧНОСТНЫХ:</b>	
<p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к себе, к своему здоровью, к познанию себя:</i></p> <p>-готовность и способность обучающихся к отстаиванию личного достоинства, собственного мнения, готовность и способность вырабатывать собственную позицию по отношению к общественно-политическим событиям прошлого и настоящего на основе осознания и осмысления истории, духовных ценностей и достижений нашей страны;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к России как к Родине (Отечеству):</i></p> <p>-формирование уважения к русскому языку как государственному языку Российской Федерации, являющемуся основой российской идентичности и главным фактором национального самоопределения;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к закону, государству и к гражданскому обществу:</i></p> <p>-мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки и общественной практики, основанное на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся с окружающими людьми:</i></p> <p>-нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей, толерантного сознания и поведения в поликультурном мире, готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и</p>	<p>Выполнение практических работ № 1 – 56</p> <p>Оценка правильности выполнения самостоятельной работы</p> <p>Решение задач во время занятия</p>

<p>сотрудничать для их достижения;</p> <p>-развитие компетенций сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношений обучающихся к окружающему миру, живой природе, художественной культуре:</i></p> <p>-готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;</p> <p>-эстетическое отношения к миру, готовность к эстетическому обустройству собственного быта.</p> <p><i>Личностные результаты в сфере отношения обучающихся к труду, в сфере социально-экономических отношений:</i></p> <p>-осознанный выбор будущей профессии как путь и способ реализации собственных жизненных планов;</p> <p>-готовность обучающихся к трудовой профессиональной деятельности как к возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;</p> <p>-готовность к самообслуживанию, включая обучение и выполнение домашних обязанностей.</p>	
<p><b>метапредметных:</b></p>	
<p>ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;</p> <p>-находить и приводить критические аргументы в отношении действий и суждений другого; спокойно и разумно относиться к критическим замечаниям в отношении собственного суждения, рассматривать их как ресурс собственного развития;</p> <p>-развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств.</p>	<p>Оценка правильности выполнения Контрольные работы №1 – 10 Выполнение практических работ № 1 – 56 Оценка правильности выполнения самостоятельной работы Решение задач во время занятия</p>
<p><b>предметных:</b></p>	
<p>использовать числовые множества на координатной прямой и на координатной плоскости для описания реальных процессов и явлений; проводить доказательные рассуждения в ситуациях повседневной жизни, при решении задач из других предметов;</p>	<p>Оценка правильности выполнения Контрольные работы №1 – 10 Выполнение практических работ № 1 – 56 Оценка правильности выполнения самостоятельной работы</p>

<p>выполнять и объяснять сравнение результатов вычислений при решении практических задач, в том числе приближенных вычислений, используя разные способы сравнений; записывать, сравнивать, округлять числовые данные реальных величин с использованием разных систем измерения; составлять и оценивать разными способами числовые выражения при решении практических задач и задач из других учебных предметов;</p> <p>составлять и решать уравнения, неравенства, их системы при решении задач других учебных предметов; выполнять оценку правдоподобия результатов, получаемых при решении различных уравнений, неравенств и их систем при решении задач других учебных предметов; составлять и решать уравнения и неравенства с параметрами при решении задач других учебных предметов; составлять уравнение, неравенство или их систему, описывающие реальную ситуацию или прикладную задачу, интерпретировать полученные результаты; использовать программные средства при решении отдельных классов уравнений и неравенств;</p> <p>определять по графикам и использовать для решения прикладных задач свойства реальных процессов и зависимостей (наибольшие и наименьшие значения, промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, асимптоты, точки перегиба, период и т.п.); интерпретировать свойства в контексте конкретной практической ситуации; определять по графикам простейшие характеристики периодических процессов в биологии, экономике, музыке, радиосвязи и др. (амплитуда, период и т.п.);</p> <p>решать прикладные задачи из биологии, физики, химии, экономики и других предметов, связанные с исследованием характеристик процессов; интерпретировать полученные результаты;</p> <p>вычислять или оценивать вероятности событий в реальной жизни; выбирать методы подходящего представления и обработки данных;</p> <p>составлять с использованием свойств геометрических фигур математические модели для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин, исследовать полученные модели и интерпретировать результат;</p> <p>владеть понятиями векторы и их координаты; уметь выполнять операции над векторами;</p>	<p>Решение задач во время занятия</p>
---	---------------------------------------

использовать скалярное произведение векторов при решении задач; применять уравнение плоскости, формулу расстояния между точками, уравнение сферы при решении задач; применять векторы и метод координат в пространстве при решении задач.	
---	--

### 3.2 Форма промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация по дисциплине математика в 1 семестре – дифференцированный зачет, во 2 семестре – экзамен.

Дифференцированный зачет проводится за счет времени отведенного на изучение дисциплины, при условии своевременного и качественного выполнения обучающимся всех видов работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины математика.

#### Перечень вопросов к дифференцированному зачету

##### Вариант 1

1. Вычислите:  $4^7 \cdot 11^4 : 44^4$
2. Найдите значение выражения:  $\frac{2 \cdot \sqrt{128}}{\sqrt{32}}$ .
3. Вычислите:  $\log_2 8 + \log_{25} 100 - \log_{25} 4$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_6(x^2 - 5) = \log_6 4x$
5. Вычислите  $\log_2 \left( \cos \frac{\pi}{3} \right)$ .
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{5\pi}{6}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 470^\circ$
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = 0,6$  и

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

9. Найдите область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2-49}}$ .

10. Банковская процентная ставка равна 7% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 34347 рублей.

11. В вазе лежат яблоки: 10 зеленых и 5 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 зеленых и 3 красных яблока?

##### Вариант 2

1. Вычислите:  $7^2 \cdot 3^7 : 21^2$ .

2. Найдите значение выражения:  $\frac{3 \cdot \sqrt{108}}{\sqrt{3}}$
3. Вычислите:  $\log_6 36 + \log_3 99 - \log_3 11$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_3(10 - x^2) = \log_3 3x$
5. Вычислите  $\log_3 \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{7\pi}{6}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 500^\circ$ .
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = 0,8$  и

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

9. Найдите область определения функции  $f(x) = \log_5 \frac{6x - x^2}{x + 2}$ .
10. Банковская процентная ставка равна 9% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 59405 рублей.
11. В вазе лежат яблоки: 5 зеленых и 10 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 3 зеленых и 2 красных яблока?

### Вариант 3

1. Вычислите:  $3^5 \cdot 25^6 : 75^5$ .
2. Найдите значение выражения:  $\frac{\sqrt{405}}{4\sqrt{5}}$ .
3. Вычислите:  $\log_2 96 - \log_2 3 - \log_9 81$ .
4. Найдите решение уравнения:  $\log_5(x^2 - 8) = \log_5 2x$ .
5. Вычислите  $\log_2 \left( \sin \frac{\pi}{6} \right)$ .
6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{5\pi}{3}$ .
7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 380^\circ$ .
8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,6$  и

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

9. Найдите область определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{36 - x^2}{x - 3}}$ .

10. Банковская процентная ставка равна 12% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 56448 рублей.

11. В вазе лежат яблоки: 6 желтых и 12 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 4 желтых и 2 красных яблока?

#### Вариант 4

1. Вычислите:  $9^5 \cdot 11^5 : 99^4$ .

2. Найдите значение выражения:  $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$ .

3. Вычислите:  $\log_4 320 - \log_4 5 - \log_6 216$ .

4. Найдите решение уравнения:  $\log_2(6 - x^2) = \log_2 5x$ .

5. Вычислите  $\log_3 \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \right)$ .

6. Переведите из радиан в градусы  $\frac{7\pi}{3}$ .

7. Укажите четверть, в которой лежит угол  $\alpha$ , если  $\alpha = 700^\circ$ .

8. Найдите значение косинуса угла  $\alpha$ , если известно, что:  $\sin \alpha = -0,8$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

9. Найдите область определения функции  $f(x) = \log_5 \frac{x - 3}{x^2 + 7x}$ .

10. Банковская процентная ставка равна 11% годовых. Какова должна быть первоначальная сумма вклада, чтобы через 2 года его размер составил 73926 рублей.

11. В вазе лежат яблоки: 6 желтых и 12 красных. Сколькими способами можно взять из вазы 2 желтых и 4 красных яблока?

Обучающиеся допускаются к сдаче экзамена при выполнении всех видов самостоятельной работы, практических и контрольных работ, предусмотренных рабочей программой и календарно-тематическим планом дисциплины.

#### Перечень вопросов к экзамену

##### Часть А

1. Корень  $n$ -ой степени. Свойства корня  $n$ -ой степени. Обобщение понятия о показателе степени

2. Понятие логарифма и его свойства. Основное логарифмическое тождество.
3. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию.
4. Логарифмические уравнения. Приемы решения. Примеры.
5. Логарифмическая функция. Ее свойства, график
6. Тригонометрические функции. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
7. Радианная мера угла. Переход от градусной меры к радианной и наоборот.
8. Зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.
9. Формулы двойного угла. Формулы сложения.
10. Решение простейших тригонометрических уравнений.
11. Тригонометрические функции. Область определения и множество значений тригонометрических функций.
12. Обратные тригонометрические функции.
13. Основные понятия комбинаторики: размещения, перестановки и сочетания.
14. Теория вероятностей. Событие, вероятность события.
15. Зависимость и независимость событий. Совместность и несовместность событий. Противоположность событий.
16. Теория вероятностей. Сложение и умножение вероятностей.
17. Приращение функции и приращение аргумента. Определение производной.
18. Физический и механический смысл производной.
19. Уравнение касательной к графику функции
20. Правила и формулы дифференцирования.
21. Применение производной для нахождения экстремума функции
22. Понятие интеграла и первообразной
23. Теорема Ньютона – Лейбница
24. Стереометрия. Основные аксиомы стереометрии и следствия из аксиом.
25. Прямые и плоскости в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
26. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости.
27. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Перпендикулярность двух плоскостей.
28. Двугранный угол. Угол между плоскостями.
29. Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Формула Эйлера.
30. Призма и ее свойства. Прямая и наклонная призмы.
31. Правильная призма. Площадь боковой и полной поверхности призмы.
32. Куб. Параллелепипед и его свойства. Объем куба. Объем параллелепипеда.
33. Пирамида и ее свойства. Площадь боковой и полной поверхности пирамиды.
34. Правильная пирамида. Усеченная пирамида.
35. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).
36. Тела и поверхности вращения. Цилиндр. Основания, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Площадь боковой и полной поверхности.
37. Тела и поверхности вращения. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Площадь боковой и полной поверхности.

38. Шар и сфера. Площадь поверхности сферы.  
 39. Сечения шара и сферы.  
 40. Формулы объема пирамиды, цилиндра и конуса. Формула объема шара.

### Часть В

1. Упростите выражение  $\frac{x-16}{x+x^{0,5}+1} : \frac{x^{0,5}+4}{x^{1,5}-1}$  и найдите его значение при  $x = 2,25$
2. Расположите числа в порядке возрастания  $2^{-\frac{3}{4}}; 2; \frac{1}{2}; 2^{\frac{2}{3}}; 2^{-\frac{4}{3}}$
3. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:  $4,(8); -2,6(93)$ .
4. Расположите числа в порядке возрастания  $\left(\frac{1}{3}\right)^2; \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}; 9^{\frac{1}{3}}; 3^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$
5. Вычислите:  $\log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$
6. Вычислите:  $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$
7. Вычислите:  $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81}$
8. Решите логарифмическое уравнение:  $\log_3 (2x - 1) = 2$
9. Решите логарифмическое уравнение  $\log_5 (x + 1) = \log_5 (4x - 5)$
10. Решите логарифмическое уравнение  $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x - 3)$
11. Решите логарифмическое уравнение  $\log_2 (x + 3) = 4$
12. Решите логарифмическое уравнение  $\log_2 (4 - x) + \log_2 (1 - 2x) = 2 \log_2 3$
13. Решите логарифмическое уравнение  $\lg (3 - x) - \lg (x + 2) = 2 \lg 2$
14. Упростите выражение:  $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$
15. Упростите выражение:  $\frac{\sin(360^\circ - \alpha) \cos(-\alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)}$
16. Упростите выражение:  $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
17. Упростите выражение:  $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$
18. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\alpha$  - угол II координатной четверти
19. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\alpha$  - угол I координатной четверти
20. Найдите  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,8$  и  $\alpha$  - угол III координатной четверти
21. Найдите  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,6$  и  $\alpha$  - угол I координатной четверти
22. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
23. Решите тригонометрическое уравнение:  $\sin^2 x - 0,25 = 0$
24. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$

25. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
26. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$
27. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} = 0$
28. Решите тригонометрическое уравнение:  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$
29. Решите показательное уравнение:  $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3} = \left(\frac{125}{64}\right)^2$
30. Решите показательное уравнение:  $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$
31. Решите показательное уравнение:  $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
32. Решите показательное уравнение:  $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2}$
33. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$  в точке  $x_0 = 2$ .
34. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = e^{2x}$  в точке  $x_0 = 0$ .
35. Запишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 3x^3 + 5x$  в точке  $(1; 8)$ .
36. Найдите производную функции  $y = \frac{5-x}{x+2}$
37. Найдите значение производной функции  $y = 3x + 4 - 5 \sin x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$
38. Найдите производную функции  $y = \frac{3+2x}{x-5}$
39. Найдите производную функции  $y = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 - 2x + 11$
40. Найдите производную функции  $y = x^5 - x(x^3 + 7)$ .
41. Найти промежутки возрастания функции  $y = x^2 - 2x + 3$ .
42. Исследуйте функцию  $f(x) = 3x^5 - 20x^3$  на возрастание (убывание) и экстремумы.
43. Исследуйте функцию  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3$  на возрастание (убывание).
44. Вычислите интеграл  $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$
45. Вычислите интеграл  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ .
46. Вычислите интеграл  $\int_1^9 \frac{6x}{\sqrt{x}} dx$
47. Вычислите интеграл  $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$
48. Вычислите интеграл  $\int_0^1 (1 + 2x)^4 dx$

49. Найдите общий вид первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{x} - \sin 3x$
50. Найти первообразную функции  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ , график которой проходит через точку  $M(2; 4)$ .
51. Найдите первообразную функции  $x\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^2}$
52. Для функции  $f(x) = (2x + 5)^6$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(-2; 3)$ .
53. В ящике 20 шаров, из них 12 белых, остальные голубые. Извлекают 2 шара. Найти вероятности, что оба шара белые.
54. В первой урне содержится 8 синих и 10 желтых шаров, во второй 4 белых и 12 желтых шаров. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару. Найти вероятность того, что оба извлеченных шара желтого цвета.
55. Алфавит некоторого языка содержит 12 букв. Сколько существует трехбуквенных слов, составленных из букв этого алфавита, если буквы в словах могут повторяться?
56. Алфавит некоторого языка содержит 12 букв. Сколько существует трехбуквенных слов, составленных из букв этого алфавита, если буквы в словах не могут повторяться?
57. В корзине 16 шаров, из них 14 белых, остальные синие. Извлекают 2 шара. Найти вероятности событий того, что оба шара синие; первый шар белый, а второй синий.
58. На дежурство из 3 мальчиков и 4 девочек случайно отбирают 4 дежурных. Сколькими способами их можно отобрать при условии, что будут отобраны 2 мальчика и 2 девочки?
59. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за определенный промежуток времени первого, второго и третьего элемента соответственно равны 0,4; 0,3; 0,5. Найти вероятность того, что за это время откажут все три элемента.
60. Из 15 туристов надо выбрать дежурного и его помощника. Сколькими способами это можно сделать?
61. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см, а радиус основания – 6 см. Найдите высоту цилиндра.
62. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а апофема - 15 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
63. В основании правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат со стороной 4 см. Диагональ призмы  $AC_1$  образует с плоскостью основания  $ABCD$  угол  $60^\circ$ . Найдите высоту призмы и площадь полной поверхности.
64. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $60^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания 8 см
65. Радиусы оснований усеченного конуса равны 12 см и 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите площадь и объем усеченного конуса.
66. Найдите полную площадь поверхности и объем пирамиды, у которой высота равна 2 м, а основанием пирамиды является квадрат со стороной 3 м.

67. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами **12 см, 10 см, 10 см**. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом  $60^\circ$ . Найдите объем и площадь боковой поверхности пирамиды.
68. Найдите сторону основания и высоту правильной четырехугольной призмы, если  $S_{\text{полн}}=90\text{см}^2$ ,  $S_{\text{бок}}=40\text{см}^2$ .
69. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на 9 дм от нее, равна  $240\text{ дм}^2$ . Найдите радиус цилиндра.
70. Основание прямой призмы – равнобедренный треугольник со стороной **6 см**, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.
71. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна  $25\text{ см}^2$ , а высота 4 см. Найдите диагональ и объем призмы.
72. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 5 см, высота призмы равна 8 см. Найдите площадь полной поверхности.
73. Радиус окружности, описанной около основания правильной шестиугольной призмы, равен 3 см. Найдите площадь полной поверхности призмы, если её высота равна 10 см.
74. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $30^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если сторона основания  $\sqrt{2}$  см.
75. Высота цилиндра на **12 см** больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна **288**  $\pi\text{ см}^2$ . Найдите радиус основания цилиндра.
76. Диагональ правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол  $60^\circ$ . Найдите объем призмы, если сторона основания 6 см.
77. Диаметр шара равен высоте конуса, образующая которого составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите отношение объёмов конуса и шара.
78. Радиус шара равен  $R=5$ . Найдите площадь полной поверхности вписанного в шар куба.
79. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 12 см, а образующая равна 17 см. Найдите: а) высоту усеченного конуса; б) площадь осевого сечения.
80. В основании правильной четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат со стороной 8 см. Диагональ призмы  $AC_1$  образует с плоскостью основания  $ABCD$  угол  $30^\circ$ . Найдите высоту призмы и площадь полной поверхности.

#### **4 Система оценивания комплекта ФЭС текущего контроля и промежуточной аттестации**

При оценивании практической и самостоятельной работы и форм промежуточной аттестации обучающегося учитывается следующее:

- качество выполнения практической части работы;
- качество оформления отчета по работе;
- качество устных ответов на контрольные вопросы при защите работы.

Каждый вид работы оценивается по пяти бальной шкале.

«5» (отлично) – за глубокое и полное овладение содержанием учебного материала, в котором обучающийся свободно и уверенно ориентируется; за умение практически

применять теоретические знания, высказывать и обосновывать свои суждения. Оценка «5» (отлично) предполагает грамотное и логичное изложение ответа.

«4» (хорошо) – если обучающийся полно освоил учебный материал, владеет научно-понятийным аппаратом, ориентируется в изученном материале, осознанно применяет теоретические знания на практике, грамотно излагает ответ, но содержание и форма ответа имеют отдельные неточности.

«3» (удовлетворительно) – если обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений учебного материала, но излагает его неполно, непоследовательно, допускает неточности, в применении теоретических знаний при ответе на практико-ориентированные вопросы; не умеет доказательно обосновать собственные суждения.

«2» (неудовлетворительно) – если обучающийся имеет разрозненные, бессистемные знания, допускает ошибки в определении базовых понятий, искажает их смысл; не может практически применять теоретические знания.

#### **Критерии оценивания практических работ.**

Практическая работа оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

Каждое задание оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

По результатам оценивания всех заданий оценка соответствует средней.

Критерии оценивания решений задач.

«5» (отлично) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении, в выборе нормативных источников и решении нет ошибок, получен верный ответ, задача решена рациональным способом.

«4» (хорошо) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор нормативных источников; есть объяснение решения, но задача решена нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.

«3» (удовлетворительно) – задание выполнено, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе нормативных источников; задача решена не полностью или в общем виде.

«2» (неудовлетворительно) – задача решена неправильно.

#### **Критерии оценивания самостоятельных работ.**

Критерии оценивания решений задач.

«5» (отлично) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении, в выборе нормативных источников и решении нет ошибок, получен верный ответ, задача решена рациональным способом.

«4» (хорошо) – составлен правильный алгоритм решения задачи, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор нормативных источников; есть объяснение решения, но задача решена нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.

«3» (удовлетворительно) – задание выполнено, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе нормативных источников; задача решена не полностью или в общем виде.

«2» (неудовлетворительно) – задача решена неправильно.

#### **Критерии оценивания контрольных работ.**

«5» (отлично) – решено 81-100% заданий.

«4» (хорошо) – решено 61 – 80% заданий.

«3» (удовлетворительно) – решено 41 – 60% заданий.

«2» (неудовлетворительно) – решено менее 40% заданий.

#### **Критерии оценивания дифференцированного зачета**

– выполнено правильно 9-11 заданий – оценка «отлично» (80 – 100%);

– выполнено правильно 6-8 заданий – оценка «хорошо» (55– 79%);

– выполнено правильно 4-6 заданий – оценка «удовлетворительно» (36–54%);

– выполнено правильно 0-3 заданий – оценка «неудовлетворительно» (0-35%).

**Критерии оценивания ответов по экзаменационным билетам.**

Ответ по экзаменационному билету оценивается максимально оценкой «5» (отлично).

Первый вопрос максимально оценивается оценкой «5» (отлично).

Каждая из двух задач оценивается отдельно максимально оценкой «5» (отлично).

По результатам оценивания всех трех заданий оценка соответствует средней.