Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич
Должность: Директор
Дата подписания: 24.06.2022 14:13:04
Уникальный программный ключ:
b683afe664d7e9f64175886cf9626a198149ad36

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет *Математики и информационных технологий*
Кафедра *Фундаментальной математики*

Оценочные материалы по дисциплине (модулю)

дисциплина ***Дополнительные главы математического анализа***

Блок Б1, часть, формируемая участниками образовательных отношений, Б1.В.ДВ.01.02

цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

44.03.05 ***Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)***

код наименование направления

Программа

Математика, Информатика

Форма обучения

Очная

Для поступивших на обучение в
2019 г.

Разработчик (составитель)
кандидат физико-математических наук, доцент
Вагапов В. З.
ученая степень, должность, ФИО

Стерлитамак 2022

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)				Вид оценочного средства
1	2	3	4				5
			неуд.	удовл.	хорошо	отлично	
ПК-1. Способен разрабатывать образовательные программы по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	ПК-1.2. Уметь: применять математический аппарат для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Обучающийся должен знать: основные методы теории интегралов, зависящих от параметра	Не умеет применять и совершенствовать современный аппарат теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Частично сформированное умение применять и совершенствовать современный аппарат теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Сформированное с небольшими пробелами умение применять и совершенствовать современный аппарат теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Сформированное целостное умение применять и совершенствовать современный аппарат теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Аудиторные работы: «Вычисление несобственных интегралов», «Вычисление несобственных интегралов, зависящих от параметра», «Свойства и применение несобственных интегралов».
	ПК-1.1. Знать: математический аппарат для	Обучающийся должен: уметь применять и	Не знает основные методы теории	Имеет частичное представление	Имеет достаточно четкое	Имеет четкое, целостное представление	Устный опрос.

	разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	совершенствовать современный аппарат теории интегралов, зависящих от параметра, при разработке образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	интегралов, зависящих от параметра	об основных методах теории интегралов, зависящих от параметра	представление об основных методах теории интегралов, зависящих от параметра	об основных методах теории интегралов, зависящих от параметра	
	ПК-1.3. Владеть: инструментарием математического анализа для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Обучающийся должен: владеть навыками применения теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Не владеет навыками применения теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Частично владеет навыками применения теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Достаточно уверенно владеет навыками применения теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Уверенно владеет навыками применения теории интегралов, зависящих от параметра, для разработки образовательных программ по предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов	Контрольные работы

2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Перечень вопросов к устному опросу для оценки уровня сформированности компетенции **ПК-1** на этапе «Знания»

1. Определенный интеграл, зависящий от параметра с постоянными пределами интегрирования.
2. Интеграл, в котором подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
3. Формула предельного перехода под знаком определённого интеграла.
4. Вычисление предела по параметру у определённого интеграла с непрерывной подынтегральной функцией.
5. Признак Дини предельного перехода под знаком интеграла.
6. Непрерывность функций, заданных интегралом, зависящим от параметра.
7. Непрерывность функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра (с постоянными пределами интегрирования и в случае, когда подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра).
8. Вычисление предела функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
9. Дифференцирование под знаком определённого интеграла по параметру (правило Лейбница).
10. Дифференцирование функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
11. Обобщённая теорема Барроу о дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит.
12. Приложение теории дифференцирования определённых интегралов, зависящих от параметров, при вычислении интегралов.
13. Применение теории дифференцирования функций, заданных интегралом, зависящим от параметра при вычислении интегралов.
14. Интегрирование функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра, с постоянными пределами интегрирования и с почти всюду непрерывной подынтегральной функцией.
15. Определённый повторный интеграл. Внутренний и внешний одинарные определённые интегралы повторного интеграла.
16. Изменение порядка вычисления одинарных определённых интегралов в повторном интеграле.

Аудиторные работы

Перечень заданий для оценки уровня сформированности компетенции **ПК-1** на этапе «Умения»

Аудиторная работа «Вычисление несобственных интегралов»

10. Пользуясь формулой $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \dfrac{d\alpha}{1+x^2\alpha^2}$, вычислить инрал

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

11. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} = 2ab\int\limits_0^1 \frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2 x},$$

где $a > b > 0$, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\,\frac{dx}{\sin x}.$$

12. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx.$

Аудиторная работа
«Вычисление несобственных интегралов, зависящих от параметра»

17. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha > 0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

18. Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi,\ \ \alpha > 1;$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx,\ \ |\alpha| < 1;$

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\,\dfrac{dx}{\cos x},\ \ |\alpha| < 1;$

4) $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

Аудиторная работа
«Свойства и применение несобственных интегралов»

1. Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на R, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin^2 \alpha x^2\, dx$; 2) $I(\alpha) = \int\limits_{-1}^2 \dfrac{x^2}{1+x^2+\alpha^2 x^4}\, dx.$

2. Найти предел:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^1 \sqrt{1+\alpha^2 x^4}\, dx$; 2) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2}\, dx$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to 1} \int\limits_2^4 \dfrac{x\, dx}{1+x^2+\alpha^6}$; 4) $\lim\limits_{\alpha\to 1} \int\limits_0^1 x^2 e^{\alpha x^3}\, dx$;

5) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^\pi x\cos(1+\alpha)x\, dx.$

3. Доказать, что функция $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x-\alpha)\, dx$ непрерывна на R.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\, f(x)\, dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

5. Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^1 f(x;\alpha)\, dx = \int\limits_0^1 \lim_{\alpha\to 0} f(x;\alpha)\, dx,$$

если:

1) $f(x;\alpha) = \dfrac{x}{\alpha^2}\, e^{-x^2/a^2}$; 2) $f(x;\alpha) = \dfrac{2xa^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$.

6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $a < a_0 < x < b$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\alpha_0}^x [f(t+\alpha) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a_0).$$

13. Найти $I'(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin(\alpha x)\,dx$; 2) $I(\alpha) = \int\limits_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x}\,dx$;

3) $I(\alpha) = \int\limits_1^2 e^{\alpha x^2}\,\frac{dx}{x}$; 4) $I(\alpha) = \int\limits_2^3 \operatorname{ch}(\alpha^4 x^2)\,\frac{dx}{x}$.

14. Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

1) $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$; 2) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$;

3) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2}\,dx$;

5) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4 x^2}\,dx$; 6) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2 x^2)\,\frac{dx}{x}$;

7) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2 x^2)\,dx$;

8) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\operatorname{ch}\alpha}^{\operatorname{sh}\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)\,dx$.

15. Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln(x^2+\alpha^2)\,dx \quad \text{при} \quad \alpha = 0?$$

16. Пусть функция f непрерывна на R. Доказать, что функция $F(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a} f(x+t)\,dt$, где $a > 0$, имеет непрерывную производную на R, и найти $F'(x)$.

22. Пусть $F(\alpha) = \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h \Big(\int\limits_0^h h(\xi + \eta + \alpha)\, d\eta \Big)\, d\xi$, где $h > 0$, f — непрерывная на R функция. Найти $F''(\alpha)$.

23. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$, $x \in \in (a;b)$, $k \neq 0$. Доказать, что функция

$$y(x) = \frac{1}{k} \int\limits_{x_0}^{x} f(t) \sin k(x-t)\, dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + k^2 y = f(x)$.

24. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$, $x \in \in (a;b)$. Доказать, что функция

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \quad \text{где} \quad n \in N,$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_0) = F'(x_0) = \ldots = F^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

25. Доказать, что функция

$$u(r) = \int\limits_0^{\pi} e^{nr\cos\theta}\, d\theta$$

при любом $n \in Z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - n^2 u = 0.$$

26. Доказать, что функция $u(x)$ удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - n^2) u = 0,$$

если:

1) $u(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$, $n \in N$;

2) $u(x) = x^n \int\limits_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi) \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$, $n \in N$.

Контрольные работы

Перечень заданий для оценки уровня сформированности компетенции **ПК-1** на этапе «Владения»

Контрольная работа № 1

1. $I(y)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$, $\lim_{y\to 0} I(y)=?$
2. $I(y)=\int_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$, $\lim_{y\to 0} I(y)=?$
3. Доказать, что $I(y)$ непрерывна, если $I(y)=\int_0^1 sin^2 yx^2 dx$.
4. $I(y)=\int_1^3 \frac{cosyx^3}{x}dx$, $I'(y)=?$
5. $I(y)=\int_y^{y^2} e^{-yx^2}\,dx$, $I'(y)=?$

Контрольная работа № 2

1. Доказать, что интеграл $I(y)=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{xln^y x}$ сходится равномерно на $E=[y_0,+\infty), y_0>1$.
2. Доказать, что интеграл $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^y}$ сходится равномерно на $E=[3,+\infty)$ и сходится неравномерно на $G=(1,+\infty)$.
3. Доказать, что функция $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}\,dx$ непрерывна на $E=R$.
4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\left(\frac{sinx}{x}\right)^2 dx$.
5. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{1-cosyx}{x}e^{-kx}\,dx, k>0$.

Вопросы к зачету

1. Определенный интеграл, зависящий от параметра с постоянными пределами интегрирования.
2. Интеграл, в котором подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
3. Формула предельного перехода под знаком определённого интеграла.
4. Вычисление предела по параметру у определённого интеграла с непрерывной подынтегральной функцией.
5. Признак Дини предельного перехода под знаком интеграла.
6. Непрерывность функций, заданных интегралом, зависящим от параметра.
7. Непрерывность функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра (с постоянными пределами интегрирования и в случае, когда подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра).
8. Вычисление предела функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
9. Дифференцирование под знаком определённого интеграла по параметру (правило Лейбница).
10. Дифференцирование функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
11. Обобщённая теорема Барроу о дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит.
12. Приложение теории дифференцирования определённых интегралов, зависящих от параметров, при вычислении интегралов.
13. Применение теории дифференцирования функций, заданных интегралом, зависящим от параметра при вычислении интегралов.

14. Интегрирование функций, заданных определёнными интегралами, зависящими от параметра, с постоянными пределами интегрирования и с почти всюду непрерывной подынтегральной функцией.
15. Определённый повторный интеграл. Внутренний и внешний одинарные определённые интегралы повторного интеграла.
16. Изменение порядка вычисления одинарных определённых интегралов в повторном интеграле.
17. Формула Стирлинга
18. Кратные интегралы, зависящие от параметра
19. Интеграл, в котором подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
20. Вычисление предела функции, заданной определённым интегралом, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от параметра.
21. Обобщённая теорема Барроу о дифференцируемости функции, заданной определённым интегралом, у которого пределы интегрирования зависят от параметра, а подынтегральная функция от параметра не зависит.
22. Приложение теории дифференцирования определённых интегралов, зависящих от параметров, при вычислении интегралов
23. Определённый повторный интеграл. Внутренний и внешний одинарные определённые интегралы повторного интеграла.
24. Изменение порядка вычисления одинарных определённых интегралов в повторном интеграле

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

Критериями оценивания при модульно-рейтинговой системе являются баллы, которые выставляются преподавателем за виды деятельности (оценочные средства) по итогам изучения модулей (разделов дисциплины), перечисленных в рейтинг-плане дисциплины (*для зачета:* текущий контроль – максимум 50 баллов; рубежный контроль – максимум 50 баллов, поощрительные баллы – максимум 10).

Шкалы оценивания:

зачета:

от 0 до 59 баллов – «незачтено»;

от 60 до 110 баллов – «зачтено».

Рейтинг-план дисциплины

Рейтинг-план семестра А

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1			**0**	**50**

Текущий контроль			**0**	**25**
1. Устный опрос	2	5		10
2. Аудиторная работа студентов на практических занятиях	3	5	0	15
Рубежный контроль			**0**	**25**
1. Контрольная работа № 1	25	1	0	25
Модуль 2			**0**	**50**
Текущий контроль			**0**	**25**
1. Устный опрос	2	5		10
2. Аудиторная работа студентов на практических занятиях	3	5	0	15
Рубежный контроль			**0**	**25**
1. Контрольная работа № 2	25	1	0	25
Поощрительные баллы			**0**	**10**
Участие в студенческой конференции / олимпиада				**10**
Итоговый контроль			**0**	**0**
Зачет			0	0

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный балл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов БашГУ:

На зачете выставляется оценка:

• зачтено - при накоплении от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

• не зачтено - при накоплении от 0 до 59 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.