СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Факультет ***Математики и информационных технологий***
Кафедра ***Фундаментальной математики***

Оценочные материалы по дисциплине (модулю)

дисциплина ***Элементы теории функций и функционального анализа***

Блок Б1, часть, формируемая участниками образовательных отношений, Б1.В.02
цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

44.03.05 ***Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)***
код наименование направления

Программа

Математика, Информатика

Форма обучения

Очная

Для поступивших на обучение в
2023 г.

Разработчик (составитель)
доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой
Кожевникова Л. М.
ученая степень, должность, ФИО

Стерлитамак 2023

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)				Вид оценочного средства
1	2	3	4				5
			неуд.	удовл.	хорошо	отлично	
ПК-2. Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Использует знания основ математической теории и имеет представление о широком спектре приложений математики	Обучающийся должен знать: основы математической теории и перспективных направлений развития современной математики; о широком спектре приложений математики и доступных обучающимся математических элементов этих приложений	Не знает или затрудняется в определении основных понятий и методов функционального анализа, места и роли функционального анализа в решении научно практических задач с использованием современного математического аппарата;	Имеет представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно практических задач с использованием современного математического аппарата, но допускает неточности в	Имеет представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно практических задач с использованием современного математического аппарата;	Имеет четкое, целостное представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно практических задач с использованием современного математического аппарата;	Тест № 1 Тест № 2

				формулировках ;			
	ПК-2.2. Применяет основы математической теории в решении научно-практических задач	Обучающийся должен уметь: применять основы математической теории в решении научно-практических задач; функционально-логическую методологию математики к системному анализу взаимосвязей процессов и построению математических моделей	Не умеет применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	В целом успешное, но не систематическое умение применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	Сформированное умение применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	Аудиторная контрольная работа № 1 Аудиторная контрольная работа № 2
	ПК-2.3. Реализует инструментарий формально-логической	Обучающийся должен владеть: инструментарием формально-логической	Не владеет инструментарием функционального анализа для решения	Владеет недостаточно инструментарием функционального анализа для	Хорошо владеет инструментарием функционального анализа для	Уверенно владеет инструментарием функционального анализа для	Индивидуальные задания № 1 Индивидуальные задания № 2

	концепции математики при построении физических и математических моделей	концепции математики для идеализации и системного анализа связей при построении физических и математических моделей процессов и явлений	математических задач в области прикладной математики и информатики;	решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	

2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Тестовые задания

Перечень вопросов теста № 1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Знания»

Примеры теста верно/неверно.

1. Верно ли утверждение: «пересечение любого числа открытых множеств является открытым»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

2. Верно ли утверждение: «объединение любого числа открытых множеств является открытым»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

3. Верно ли утверждение: «все линейное нормированное пространство E - открытое »

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

4. Верно ли утверждение: «объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

5. Верно ли утверждение: «пополнение по соответствующей норме пространства со скалярным произведением является гильбертовым пространством»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

6. Верно ли утверждение: «пополнение нормированного пространства - банахово пространство»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

7. Верно ли утверждение: «любое счетное множество точек есть множество меры нуль на числовой прямой»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

8. Верно ли утверждение: «фундаментальная в среднем последовательность есть последовательность сходящаяся в среднем»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

9. Верно ли утверждение: «обобщенная производная постоянной не равна нулю»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

10. Верно ли утверждение: «из сходимости в среднем следует равномерная сходимость»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

11. Верно ли утверждение: «открытое множество состоит из граничных и внутренних точек»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

12.Верно ли утверждение: «ортогональная система является линейно зависимой »

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

13.Верно ли утверждение: « всякая фундаментальная последовательность сходится »

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

Примеры теста множественный выбор

1.Выберете неравенство Гельдера:

1) $\sum_{i=1}^{m}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i|^p\right)^{1/p}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

2) $\left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i|^p\right)^{1/p}$;

3)$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$;

4) $\sum_{i=1}^{m}|\xi_i\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i|^p\right)^{1/p}$, $p > 1$.

Эталон: 1).

2. Выберете неравенство Бесселя:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|}$;

3) $\sum_{k=1}^{m}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$;

4) $\sum_{k=1}^{m}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|}$.

Эталон: 1).

3. Выберете равенство Парсеваля-Стеклова:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|\|\phi_k\| = \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|}$;

3) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$;

4) $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|}$.

Эталон: 3).

4. Выберете неравенства треугольника:

1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

2) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;

3)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Эталон: 1).

5. Выберете равенства параллелограмма:

1) $|x - y|^2 + |x - y|^2 = 2x^2 + 2y^2$;

2) $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;

3) $2\|x - y\|^2 + 2\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Эталон: 2).

6. Справедливо ли неравенство $\sum_{i=1}^{m}|\xi_i\eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ при:

1) $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$;

2) $p = 2$, $q = 2$;

3) $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;

4) $p = q = 1$.

Эталон: 3).

7. Неравенство Парсеваля-Стеклова $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|^2\|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x,\phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$ справедливо для системы ϕ_k :

1) ортогональной;

2) ортонормированной;

3) полной.

Эталон: 3).

8. Дана формула $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k - \eta_k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k + \eta_k)^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k{}^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k{}^2$ это:

1) равенство параллелограмма в L_2;

2) равенство Парсеваля-Стеклова;

3) равенство параллелограмма в $L_2[a, b]$.

Эталон: 1).

9. Дополните текст : множество $\widehat{E}$ в линейном пространстве E называется линейным (…), если для любых x,y $\in \widehat{E}$ и любых скаляров λ,μ линейная комбинация λx+ μy $\in \widehat{E}$.

1) многообразием;

2) изоморфизмом;

3) гомоморфизмом.

Эталон: 1).

10. Дополните текст : множество M ⊂ E назовем ограниченным, если оно содержится в некотором (…), то есть существует число C > 0 ∀ x ∈ M, $\|x\| \leq C$.

1) пространстве;
2) подпространстве;
3) шаре.
Эталон: 3).

11. Дополните текст : множество $M \subset E$ называется (…), если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую её окрестность.
1) открытым;
2) закрытым;
3) замкнутым.
Эталон: 1).

12. Дополните текст : точка $x_0 \in M$ называется (…), если существует её окрестность содержащейся в множестве M.
1) внутренней;
2) внешней;
3) граничной.
Эталон: 1).

13. Дополните текст : полное нормированное пространство называется (…).
1) банаховым;
2) евклидовым;
3) гильбертовым.

Эталон: 1).

14. Дополните текст : ряд называется (…), если сходится последовательность его частичных сумм.
1) сходящийся;
2) расходящийся;
3) числовым.
Эталон: 1).

15. Дополните текст : нормированное пространство X называется (…), если в нем существует счетное, плотное в X множестве.
1) банаховым;
2) сепарабельным;
3) полным.
Эталон: 2).

16. Дополните текст : Множество в нормированном пространстве называется множеством(…) категории, если оно есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств.
1) 1 категории;
2) 2 категории;
3) 3 категории.
Эталон: 1).

17. Дополните текст : пространство со скалярным произведением называется(…), если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.
1) евклидовым;
2) гильбертовым;
3) сепарабельным.
Эталон: 2).

18. Дополните текст : нормированные пространства X и $\widehat{X}$ называются (…), если всюду на X определена линейная функция $\hat{x} = J(x)$ со значением в $\widehat{X}$, осуществляющая изоморфизм X и $\widehat{X}$ как линейных пространств и такая, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что неравенство $\alpha\|x\| \leq \|J(x)\| \leq \beta\|x\|$ справедливо для всех $x \in X$.
1) изоморфными;
2) изометричными;
3) гомеоморфными.
Эталон: 1).

19. Дополните текст : множество $M \subset [a,b]$ называется множеством(…), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная или счетная система отрезков $\{[\alpha_n \beta_n]\}$ такая, что

1)множество M покрывается отрезками этой системы, то есть $M \subset \bigcup_n [\alpha_n \beta_n]$;
2)сумма длин отрезков $[\alpha_n \beta_n]$ меньше ε, то есть $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$.

1) замкнутым;
2) открытым;
3) меры нуль.
Эталон: 3).

20. Дополните текст : нормированное пространство X (…) в нормированное пространство $\widehat{X}$, если всюду на X задана линейная функция $J(x)$, причем существует постоянная $\beta > 0$ такая, что $\|J(x)\| \le \beta\|x\|$ для всех $x \in X$.
1) вложено;
2) изоморфно;
3) изометрично.
Эталон: 3).

21. Дополните текст : если функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (…), то их называют эквивалентными.
1) симметричны;
2) равны почти всюду;
3) рефлексивны.
Эталон: 2).

22. Установите верные аксиомы евклидового пространства:

1) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Эталон: 3).

Перечень вопросов теста № 2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Знания»

Примеры теста множественный выбор

1. Выберете неравенства Минковского:

1) $\int_a^b (|x(t) + y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \le \int_a^b (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + \int_a^b (|y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, $p \ge 1$;

2) $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)dt$;

3) $\left(\sum_{i=1}^m |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \ge 1$.

Эталон: 1), 3).

2. Выберете неравенства Коши-Буняковского:

1) $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;

2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;

3) $|(x, y)| \le \|x\|\|y\|$;

4)$\left|\sum_{i=1}^\infty \xi_i \eta_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^\infty {\xi_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^\infty {\eta_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Эталон: 3), 4).

3. При каких значениях параметра p верна формула $\int_a^b (|x(t) + +y(t)|^p dt)^{1/p} \le \int_a^b (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + \int_a^b (|y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$:

1) p >1;

2) p =1;

3) p <1.

Эталон: 1), 2).

4. Справедливо ли неравенство $\left(\sum_{i=1}^m |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + +\left(\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ при:

1) $p = \frac{1}{3}$;

2) $p = 3$;

3) $p = 1$.

Эталон: 2), 3).

5. Неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \le \|x\|\|y\|$ справедливо в:

1) гильбертовом пространстве;

2) нормированном пространстве;

3) евклидовом пространстве;

4) банаховом пространстве.

Эталон: 1), 3).

6. Неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \le \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$ имеет место в:

1) гильбертовом пространстве;

2) нормированном пространстве;

3) евклидовом пространстве;

4) банаховом пространстве.

Эталон: 1), 3).

7. Укажите верные утверждения унитарного пространства:

1) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Эталон: 1), 2), 4)

8. Укажите верные аксиомы нормированного пространства:

1) $\|x\| \ge 0,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = \|\lambda\|\|x\|$;

3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

4) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Эталон: 1), 3), 4).

9. Укажите верные аксиомы метрического пространства:

1) $\rho(\lambda x, y) = \lambda\rho(y, x)$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

4) $\rho(x, y) \ge 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Эталон: 2), 3), 4).

Примеры теста на соответствие

1. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(теорема и её формулировка)

1. Критерий Коши сходимости ряда	А. Ортогональная система $\{\phi_k\}$ из гильбертова пространства полна $\Leftrightarrow$ её линейная оболочка L плотна в H.
2. Критерий плотности	Б .Всякое нормированное линейное пространство E. можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\hat{E}$.
3. Пополнение нормированное пространства	В. Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H; L плотно в H $\Leftrightarrow L^{\perp} = \{0\}$.
4. Критерий полноты	Г. Пусть X – нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходился, необходимо, а если X банахово, то и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер N такой, что при всех n > N и при всех натуральных p выполнялось неравенство $\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| < \varepsilon$.

Эталон: 1-Г, 2-В, 3-Б, 4-А.

2. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(пространства и их нормы)

1. Пространство ℓ_p	А. $\|x\| = \max_{t\in[a,b]}\|x(t)\|$
2. Пространство C[a,b]	Б. $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
3. Пространство L[a,b]	В. $\|x\| = \int_a^b \|x(t)\| dt$
4. Пространство L_p[a,b]	Г. $\|x\| = \left(\int_a^b \|x(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

Эталон: 1-Б, 2-А, 3-В, 4-Г.

3. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(пространства и их нормы)

1. Пространство L_p[a,b]	А. $\|x\| = \left(\int_a^b x'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$
2. Пространство H^1[a,b]	Б. $\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)\, dt + \int_a^b x'^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$

3. Пространство $C^k[a,b]$	В. $\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} \left\|x^i(t)\right\|$
4. Пространство $\dot{H}^1[a,b]$	Г. $\|x\| = (\int_a^b \|x(t)\|^p dt)^{\frac{1}{p}}$

Эталон: 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-А.

4. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(пространства и их скалярное произведение)

1. Пространство $\dot{H}^1[a,b]$	А. $(u,v) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$
2. Пространство $H^1[a,b]$	Б. $(u,v) = \int_a^b u(t)v(t)\,dt$
3. Пространство ℓ_2	В. $(u,v) = \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$
4. Пространство $L_2[a,b]$	Г. $(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,dx + \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

5. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. m-мерное линейное пространство	А. Если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов.
2. Бесконечномерное линейное пространство	Б. Если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.
3. Полное нормированное пространство	В. Если в нем существует счетное, плотное множество.
4. Сепарабельное нормированное пространство	Г. Если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие m+1 векторов линейно зависимые.

Эталон: 1-Г, 2-А, 3-Б, 4-В.

6. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. Предел $F(x)$	А. Пусть $F(x)$ – оператор с областью определения $D(F) \subset X$ и с областью значений $R(F) \subset Y$, где X и Y - нормированные пространства. Оператор F будем называть (…), если он переводит всякое ограниченное в X множество из $D(F)$ во множество, ограниченное в Y.
2. Непрерывный в точке x_0	Б. Пусть дана последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}$ (X,Y). Последовательность (…) к оператору $A \in \mathcal{L}$ (X,Y), если для любого $x \in X$, $\|A_n x - Ax\| \to 0, n \to \infty$.
3. Ограниченный	В. Элемент $y_0 \in Y$ называется (…) при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in S(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $\| x - x_0 \| < \delta$, имеем $\| F(x) - y_0 \| < \varepsilon$.
4. Сильно сходится	Г. Пусть дан оператор $F: X \to Y$, определенный в окрестности точки x_0.

	Оператор F называется (…), если $F(x) \to F(x_0)$ при $x \to x_0$.

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

7. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. Равномерно выпуклое	А. Множество $M \subset X$ называется (…), если для каждого $f \in X^*$ числовое множество $\{\langle x, f\rangle, x \in M\}$ ограниченно.
2. Слабо сходящейся	Б. Если $D(A^*) \supset D(A)$ и на $D(A)$ $A^*x = Ax$, то есть A^* является расширением A, то оператор называется (…).
3. Слабо ограниченный	В. Банахово пространство X называется (…), если для люб- ых $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset X$ таких, что $\|x_n\| = 1$, $\|y_n\| = 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$, $n \to \infty$ имеем $\|x_n - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$.
4. Симметричный	Г. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (…) к элементу $x \in X$, если $\langle x_n, f\rangle \rightharpoonup \langle x, f\rangle$ для любого $f \in X^*$.

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

Примеры теста короткий ответ

1. Вставьте в текст пропущенное слово: множество W в линейном пространстве E называется (…), если всякий раз из того, что $x_1, x_2 \in W$ следует, что W принадлежит отрезок, соединяющий x_1 и x_2.

Эталон: выпуклым.

2. Вставьте в текст пропущенное слово: вещественный функционал p(x) называется (…),если для любых $x_1, x_2 \in E$ и любых $t \in [0,1]$ $p\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)p(x_1) + tp(x_2)$.

Эталон: выпуклым.

3. Вставьте в текст пропущенное слово: точка a называется (…) точкой множества M в линейном нормированном пространстве E, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от a.

Эталон: предельной.

4. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $M \subset E$; $E \setminus M = \{x \in E: x \notin M\}$ называется (…) множества M.

Эталон: дополнением.

5. Вставьте в текст пропущенное слово: последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (…), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых номеров $n > N$ и любых натуральных p выполняется неравенство: $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Эталон: фундаментальной.

6. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть L – линейное многообразие в H. Совокупность всех элементов из H, ортогональных к L, называется(…) к L.

Эталон: ортогональным дополнением.

7. Вставьте в текст пропущенное слово: точка $x_0 \notin M$ называется (…) точкой M, если существует шар $S_r(x_0)$, не содержащий точек из M.

Эталон: внешней.

8. Вставьте в текст пропущенное слово: точка $x_0 \in E$ называется (…) точкой M, если в любом шаре $S_r(x_0)$ есть точки, принадлежащие M, и точки, принадлежащие M.

Эталон: граничной.

9. Вставьте в текст пропущенное слово: два оператора $F: X \to Y$ и $\Phi: X \to Y$ называется (…), если совпадают их области определения $(D(F) = D(\Phi))$ и $F(x) = \Phi(x)$ для всех $x \in D$.

Эталон: равными.

10. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор Φ называется (…) оператора F, если $D(\Phi) \supset D(F)$ и $F(x) = \Phi(x)$ для всех $x \in D(F)$.

Эталон: расширением.

11. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор $y = F(x)$ называется (…), если каждому образу $y \in R(F)$ отвечает единственный прообраз $x == F^{-1}(y)$.

Эталон: взаимно однозначным.

12. Вставьте в текст пропущенное слово: если F взаимно однозначен, то формула $x = F^{-1}(y)$, где y пробегает R, определяет оператор $F^{-1}: Y \to X$, который называется (…).

Эталон: обратным.

13. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор $A: X \to Y$ с областью определения $D(A)$ называется (…), если

1) $D(A)$ – линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in D$ и любых скаляров λ_1, λ_2.

Эталон: линейным.

14. Вставьте в текст пропущенное слово: линейный оператор A называется (…), если он непрерывен в точке $x = 0$.

Эталон: непрерывными.

15. Вставьте в текст пропущенное слово: если $Ax = 0$ для любого $x \in X$, то оператор A называется (…) оператором и обозначается 0.

Эталон: нулевым.

16. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется (…) к A, если $AU = I_y$.

Эталон: правым обратным.

17. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется (…) к A, если $VA = I_x$.

Эталон: левым обратным.

18. Вставьте в текст пропущенное слово: проекторы P_1 и P_2 называются (…), если $P_1 P_2 = 0$.

Эталон: ортогональными.

19. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть X – вещественное нормированное пространство, а E – вещественная ось. Всякий оператор $f: X \to E$ называется (…).

Эталон: функционалом.

20. Является ли нормой функция $\|y\| = \max_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} |y(x)|$ в пространстве $C[a, b]$.

Эталон: нет.

21. Является ли нормой функция $\|y\| = |y(a)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|$ в пространстве $C^1[a,b]$.

Эталон: да.

22. Является ли нормой функция $\|y\| = |y(b) - y(a)| + \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|$ в пространстве $C^1[a,b]$.

Эталон: нет.

23. Является ли нормой функция $\phi(x)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \phi(x) = |\mathrm{arctg}x|$.

Эталон: нет.

24. Является ли нормой функция $\|y\| = \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|$ в пространстве $C^1[a,b]$.

Эталон: да.

25. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$.

Эталон: нет.

26. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x,y) = \sqrt{|y-x|}$.

Эталон: да.

27. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x,y) \equiv 0$.

Эталон: да.

28. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x,y) \equiv x - y$.

Эталон: да.

Примеры теста – числового

1. Найти норму функции $y = 2\sin\pi x - \cos\pi x$ в пространстве $C[0,2]$.
Эталон: $\sqrt{5}$.

2. Найти норму функции $y = 3\cos\pi x - \sin\pi x$ в пространстве $C[0,2]$.
Эталон: $\sqrt{10}$.

3. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $C[0,2]$.
Эталон: 2.

4. Найти норму функции $y = x^2 - 4x$ в пространстве $C[0,2]$.
Эталон: 4.

5. Найти норму функции $y = x^2 - 6x$ в пространстве $C[0,2]$.
Эталон: 9.

6. Найти норму функции $y = 2\sin\pi x - \cos\pi x$ в пространстве $H[0,2]$.
Эталон: $\sqrt{5}$.

7. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $H[0,2]$.
Эталон: $\frac{4}{\sqrt{15}}$.

8. Найти норму функции $y = x^3 - 1$ в пространстве $H[0,2]$.
Эталон: $\sqrt{\frac{86}{7}}$.

9. Найти норму функции $y = x^2 - 6x$ в пространстве $C^1[0,2]$.
Эталон: 15.

10. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $C^1[0,2]$.
Эталон: 5.

11. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t, y(t) = t$ в пространстве $L_2[0, \pi]$.
Эталон: $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$.

12. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t, y(t) = t$ в пространстве $H^1[0, \pi]$.
Эталон: $\sqrt{\frac{3}{\pi^2+3}}$.

13. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = 2(x(1) - x(0)),\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 4.

14. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t)dt,\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 1.

15. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)dt - x(0),\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 3.

16. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^0 x(t)dt - \int_0^1 x(t)\, dt,\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 2.

17. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = x(-1) + x(1),\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 2.

18. Найти норму оператора $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$.
Эталон: 1.

19. Найти норму оператора $A: C[-1,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t)$.
Эталон: 1.

20. Найти норму оператора $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2x(0)$.
Эталон: 1.

21. Найти норму оператора $A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t^2)$.
Эталон: 1.

22. Найти норму оператора $A: C^1[a, b] \to C[a, b],\ Ax(t) = x(t)$.
Эталон: 1.

23. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt,\ x \in C[-1,1]$.
Эталон: 1.

24. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_0^1 tx(t)dt,\ x \in C^1[-1,1]$.
Эталон: 1.

25. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt,\ x \in \widetilde{L_1}[-1,1]$.
Эталон: 1.

26. Найти норму функционала $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)dt,\ x \in \widetilde{L_2}[-1,1]$.
Эталон: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Контрольные работы

Перечень заданий для аудиторной контрольной работы №1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Умения»

1. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;

2. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является эллипсоид:

$\left\{x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\right\}$;

3. Для множества $M = \left\{x(t) \in \widetilde{L}_2[-1,1] \mid x(t) = x(-t)\right\}$ описать $M^{\perp}$.

4. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X. Доказать, что функция $\rho_1(x, y) = \dfrac{4\rho(x, y)}{3 + 2\rho(x, y)}$ также является метрикой. Является ли пространство (X, ρ_1) полным, если (X, ρ) – полное метрическое пространство.

5. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \dfrac{1}{e^{nt}} - \dfrac{1}{e^{(n+1)t}}$.

Перечень заданий для аудиторной контрольной работы №2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Умения»

1. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $x(0) = 0$.
2. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве C[-1,1], найти его норму и определить A^2: $Ax(t) = 4x(t) + 5x(-t)$.
3. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}: $Ax(t) = \int_0^1 \tau^2 x(\tau) d\tau + x(t)$.
4. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму: $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt[4]{t})$.
5. В пространстве C[0,1] для элемента *x(t)* определим последовательность операторов $(A_n x)(t) = t^n(1 - t)x(t)$. Каков характер сходимости последовательности?
6. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f\rangle = \int_0^{1/2} x(t)dt$ в $C[0,1]$.
7. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f\rangle = \int_0^1 t^3 x(t^4)dt$ в пространствах $L_1[0,1], C[0,1]$.
8. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ в l_2, l_1.
9. Является ли линейным, непрерывным в $L_2[0,1]$ функционал
10. $\langle x, f\rangle = \int_0^1 t^2 |x(t)|\, dt$?

11.

Индивидуальные задания

Перечень индивидуальных заданий №1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Владения»

Задача 1.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau;$$

Задача 2.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[-1,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t);$$

Задача 3.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = t^2 x(0);$$

Задача 4.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[0,1] \to C[0,1],\ Ax(t) = x(t^2);$$

Задача 5.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C^1[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) = x(t);$$

Задача 6.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C^1[a,b] \to C[a,b],\ Ax(t) = \frac{dx}{dt};$$

Задача 7.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: L_2[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)d\tau;$$

Задача 8.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: H^1[0,1] \to L_2[0,1],\ Ax(t) = x(t);$$

Задача 9.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство $l_p^m(p>1)$ столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m (x_k \in R)$ с нормой $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p\right)^{1/p}$;

Задача 10.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство l_1 последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)(x_k \in R)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$, с нормой $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$;

Задача 11.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство $l_p\ (p>1)$ последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)(x_k\in R)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, с нормой $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^p\right)^{1/p}$;

Задача 12.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство c_0 стремящихся к нулю последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)(x_k\in R)$ с нормой $\|x\|=\max_k|x_k|$;

Задача 13.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство c сходящихся последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)(x_k\in R)$ с нормой $\|x\|=\sup_k|x_k|$;

Задача 14.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве $M[a;b]$ всех ограниченных функций на $[a;b]$ с $\|x\|=\sup_{t\in[a;b]}|x(t)|$;

Задача 15.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве K непрерывных на вещественной прямой финитных функций с $\|x\|=\max_t|x(t)|$;

Индивидуальные задания

Перечень индивидуальных заданий №2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Владения»

Задача 1.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве $\tilde{L}_p[a;b]$ непрерывных на $[a;b]$ функций с $\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$;

Задача 2.

Сходится ли в пространстве $C[0;1]$ последовательность:

$x_n(t)=t^n-t^{n+1}$;

Задача 3.

Сходится ли в пространстве $C[0;1]$ последовательность:

$x_n(t)=t^n-t^{2n}$;

Задача 4.

Сходится ли в пространстве $C[0;1]$ последовательность: $x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$;

Задача 5.

Сходится ли в пространстве $C^1[0;1]$ последовательность:

$x_n(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^{n+2}}{n+2}$;

Задача 6.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$\int_0^1 |x(t)|dt \le 1$;

Задача 7.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \le 1$;

Задача 8.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию:

$\max\limits_{[0;1]}|x(t)| + \max\limits_{[0;1]}|x'(t)| \le 1$;

Задача 9.

На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X - банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.

Задача 10.

В линейном пространстве $C[0,\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^\infty [x(t)]^2 e^{-t}dt$ сходится, положим $(x,y)=\int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t}dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

Задача 11.

В линейном пространстве $C(-\infty;\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 e^{-t^2}dt$ сходится, положим $(x,y)=\int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t^2}dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.

Задача 12.

Доказать, что в пространстве $C[a;b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a;b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета:

экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Список вопросов и задач к экзамену прилагается.

Перечень вопросов для экзамена:

1. Линейные пространства (определение и примеры л.п., линейная зависимость и линейная независимость элементов, конечномерные и бесконечномерные л.п.)
2. Линейные пространства (линейные многообразия, изоморфизм л.п., выпуклые множества в л.п.)
3. Нормированные пространства (определение и примеры н.п., метрические пространства, предел последовательности в н.п., неравенства Гельдера и Минковского для сумм и интегральные)
4. Анализ в н.п. (открытое и замкнутое множества, предельная точка множества, внешняя, внутренняя и граничная точки множества)
5. Анализ в н.п. (эквивалентность норм в конечномерных н.п., подпространства н.п., линейные многообразия, плотные в н.п., изоморфизм, изометрия и вложение н.п.)
6. Евклидовы пространства (определение и примеры е.п., неравенство Коши-Буняковского, ортогональные и ортонормированные системы, процесс ортогонализации Шмидта, свойства скалярного произведения)
7. Банаховы пространства (определение и примеры б.п., ряды в н.п. и б.п.)
8. Банаховы пространства (б.п. со счетным базисом и сепарабельные пространства, принцип вложенных шаров, множества I и II категории)
9. Гильбертовы пространства (определение и примеры г.п., расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества, расстояние от точки до подпространства, ортогональные дополнения)
10. Гильбертовы пространства (ряды Фурье в г.п., неравенство Бесселя, полные ортогональные системы, равенство Парсеваля, ортогональные разложения в г.п.)
11. Теорема о пополнении пространства Лебега. Пополнение пространств со скалярным произведением
12. Пространства Лебега
13. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.
14. Интеграл Лебега (множества меры нуль, эквивалентные функции, сходимость почти всюду и сходимость в среднем, функции, интегрируемые по Лебегу)
15. Интеграл Лебега (основные свойства)
16. Интеграл Римана и интеграл Лебега
17. Пространства Соболева (определение)
18. Пространства Соболева ($H^1(a,b)$, обобщенная производная)

19. Пространства Соболева (теорема вложения, абсолютная непрерывность функций из $H^1(a,b)$)
20. Пространства Соболева $H^1(G)$, $H^{\circ 1}(G)$
21. Операторы (определение оператора, взаимно однозначные операторы, суперпозиция операторов, операторы в н.п., предел и непрерывность)
22. Линейные операторы (определение л.о., непрерывные л.о., ограниченные л.о., их эквивалентность, примеры л.о.)
23. Пространства л.о. (нормированное пространство L(X,Y), равномерная сходимость л.о., ряды в L(X,Y), пространство L(X))
24. Пространства л.о. (сильная сходимость в L(X,Y), принцип равномерной ограниченности)
25. Пространства л.о. (продолжение л.о. по непрерывности)
26. Обратные операторы (множество нулей N(A), критерий существования ограниченного обратного оператора, теорема Банаха)
27. Обратные операторы (примеры о.о., левый и правый о.о.)
28. Прямая сумма б.п., график оператора, замкнутый оператор
29. Теорема Банаха о замкнутом графике и ее следствия, норма графика и эквивалентные ей нормы.
30. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.
31. Сопряженные пространства (два вида сходимости в сопряженном пространстве, теорема Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве)
32. Сопряженные пространства (рефлексивные пространства, слабая сходимость в нормированных пространствах).
33. Сопряженные и самосопряженные операторы (определение сопряженного оператора, самосопряженные операторы)
34. Сопряженные и самосопряженные операторы (неотрицательные операторы, определение симметрического оператора, операторы ортогонального проектирования)
35. Компактные множества в нормированном пространстве (компактные множества, бикомпактные множества)
36. Компактные множества в нормированном пространстве (компактные множества в нормированных пространствах, критерий компактности Хаусдорфа, следствия из теоремы Хаусдорфа)
37. Компактные множества в нормированном пространстве (компактность и конечномерность, слабая компактность)
38. Компактные множества в нормированном пространстве (теорема Арцела)
39. Линейные вполне непрерывные операторы (определение вполне непрерывного оператора, вполне непрерывные операторы и слабая сходимость)
40. Линейные вполне непрерывные операторы (теорема Шаудера, примеры вполне непрерывных операторов).

Перечень задач для экзамена:

1. Найти угол между элементами $x(t)=t$, $y(t)=t^2$ в пространстве $\tilde{L}_2[0,1]$;
2. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является параллелепипед:
   a. $\{x \in \ell_2, x=(x_1, x_2, \ldots) : |x_n| < 2^{-n+1}\}$;
3. Для множества $M = \{x(t) \in \tilde{L}_2[-1,1] \mid x(t)=0, t \geq 0\}$ описать $M^{\perp}$.

4. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Доказать, что функция $\rho_2(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$ также является метрикой. Является ли пространство (X,ρ_2) полным, если (X,ρ) – полное метрическое пространство.
5. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{e^{nt}}{n}-\dfrac{e^{(n+1)t}}{n+1}$.
6. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $x(0)=0$.
7. Найти угол между элементами $x(t)=tg\,t$, $y(t)=ctg\,t$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;
8. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является эллипсоид:
   a. $\left\{x\in\ell_2,\ x=(x_1,x_2,\ldots):\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x_n^2<1\right\}$;
9. Для множества $M=\left\{x(t)\in\tilde{L}_2[0,1]:\int\limits_0^1 x(t)dt=0\right\}$ описать $M^{\perp}$.
10. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Доказать, что функция $\rho_2(x,y)=\ln(\rho(x,y)+1)$ также является метрикой. Является ли пространство (X,ρ_2) полным, если (X,ρ) – полное метрическое пространство.
11. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{e^{nt}}{n}-\dfrac{e^{2nt}}{2n}$.
12. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $\int\limits_{-1}^{1}x(t)dt=0$.
13. Найти угол между элементами $x(t)=e^t$, $y(t)=e^{-t}$ в пространстве $\tilde{L}_2[0,1]$;
14. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{t^n}{n}-\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.
15. Найти угол между элементами $x(t)=\sin t$, $y(t)=\cos t$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;
16. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t)=\dfrac{t^n}{n}-\dfrac{t^{2n}}{2n}$.
17. Является ли сходящейся в пространстве ℓ_2 последовательность $x_n=\left(\underbrace{\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{1}{n}}_{n^2},0,0,\ldots,0,\ldots\right)$.
18. Является ли сходящейся в пространстве ℓ_3 последовательность $x_n=\left(1,\dfrac{1}{2},\ldots,\dfrac{1}{n},0,0,\ldots,0,\ldots\right)$.
19. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию: $\int\limits_0^1|x(t)|dt\le 1$

20. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию: $\int_0^1 |x(t)|^2 dt \le 1$;
21. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X - банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.
22. В линейном пространстве $C[0,\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^\infty [x(t)]^2 e^{-t} dt$ сходится, положим $(x,y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t} dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.
23. В линейном пространстве $C(-\infty;\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 e^{-t^2} dt$ сходится, положим $(x,y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t^2} dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.
24. Доказать, что в пространстве $C[a;b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a;b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.
25. Образуют ли в пространстве $C[-1;1]$ подпространство множество четных функций.
26. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0;1]\,(p \ge 1)$, которым эта функция принадлежит.
27. Доказать, что множество $C[a;b]$ образует метрическое пространство, если под расстоянием между двумя элементами этого множества φ и ψ подразумевать $\rho(\varphi,\psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| dx$.
28. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
29. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;
30. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
31. $A: C[-1,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t)$;
32. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
33. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(0)$;
34. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
35. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$;
36. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
37. $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = x(t)$;
38. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
39. $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;
40. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
41. $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau) d\tau$;
42. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

43. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве C[0,1], найти его норму и определить A^2: $Ax(t) = 2x(t) + 3x(-t)$.
44. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}: $Ax(t) = \int_0^1 x(\tau)d\tau + x(t)$.
45. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму: $A: L_1[0,1] \to L_1[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt[3]{t})$.
46. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $x = x(t) \to \int\limits_0^{1/2} x(t)dt$ в $L_2[0,1]$.
47. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \xi_k$ в l_2.
48. В пространстве l_1 для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ элемента определим последовательность операторов $A_n x = (0,0,\ldots,0,\frac{\xi_{n+1}}{n},\frac{\xi_{n+2}}{n},\ldots)$. Каков характер сходимости последовательности?
49. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве C[0,1], найти его норму и определить A^2: $Ax(t) = 3x(t) - 2x(-t)$.
50. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1}: $Ax(t) = \int_0^1 e^{t+\tau}x(\tau)d\tau + x(t)$.
51. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму: $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt{t})$.
52. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $x = x(t) \to \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$ в $L_2[0,1]$.
53. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \xi_k - \xi_{k-1}$ в l_2.
54. В пространстве l_1 для $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ элемента определим последовательность операторов $A_n x = (\frac{\xi_1}{n},\frac{\xi_2}{n},\ldots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\ldots)$. Каков характер сходимости последовательности?

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

Рейтинг-план дисциплины *(при необходимости)*

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	**Баллы**	
			Минимальный	**Максимальный**
Модуль 1			0	**35**
Текущий контроль			0	**20**
Аудиторная контрольная			0	**20**

работа №1				
Рубежный контроль			0	**15**
Тестирование №1	10	1	0	**10**
Индивидуальное задание №1	5	1	0	**5**
Модуль 2			0	**35**
Текущий контроль			0	**20**
Аудиторная контрольная работа №2			20	**20**
Рубежный контроль			0	**15**
Тестирование №2	10	1	0	**10**
Индивидуальное задание №2	5	1	0	**5**
Поощрительные баллы			0	**10**
Активность во время занятий				**10**
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
Посещение лекционных занятий			0	**–6**
Посещение практических занятий			0	**-10**
Итоговый контроль				**30**
экзамен				**30**

Оценочное средство	**Описание**	**Критерии оценки**
Аудиторная контрольная работа	Письменное выполнение заданий по вариантам в аудитории в установленное время (90 мин.)	Достаточно выполнить любые 4 задания из предлагаемых в контрольной работе. Максимальный количество баллов за каждое задание - 5 баллов.
Индивидуальное задание	Письменное домашнее выполнение индивидуальных заданий по графику	Достаточно выполнить любые 5 заданий из предлагаемых в индивидуальном задании. За каждое правильно выполненное задание ставится 1балл.
Тестирование	Тестирование проводится с использованием дистанционного курса в системе Moodle.	Максимальное количество баллов за тестирование -10. Порядок начисления балов определяется в системе Moodlle в зависимости от сложности вопроса.

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный балл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов УУНиТ:

На экзамене выставляется оценка:

• отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

• хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов,

• удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов,

• неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.