

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич
Должность: Директор
Дата подписания: 24.06.2022 14:12:59
Уникальный программный ключ:
b683afe664d7e9f64175886cf9626a196149ad56

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет Математики и информационных технологий
Кафедра Фундаментальной математики

Оценочные материалы по дисциплине (модулю)

дисциплина Элементы теории функций и функционального анализа

Блок Б1, часть, формируемая участниками образовательных отношений, Б1.В.02
цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
код наименование направления

Программа

Математика, Информатика

Форма обучения

Очная

Для поступивших на обучение в 2019 г.

Разработчик (составитель)
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
Кожевникова Л. М.
ученая степень, должность, ФИО

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)	3
2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)	6
3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания	27

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)				Вид оценочного средства
			1	2	3	4	
			неуд.	удовл.	хорошо	отлично	
ПК-2. Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Использует знания основ математической теории и имеет представление о широком спектре приложений математики	Обучающийся должен знать: основы математической теории и перспективных направлений развития современной математики; о широком спектре приложений математики и доступных обучающимся математических элементов этих приложений	Не знает или затрудняется в определении основных понятий и методов функционального анализа, места и роли функционального анализа в решении научно-практических задач с использованием современного математического аппарата;	Имеет представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно-практических задач с использованием современного математического аппарата, но допускает неточности в	Имеет представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно-практических задач с использованием современного математического аппарата;	Имеет четкое, целостное представление об основных понятиях и методах функционального анализа, месте и роли функционального анализа в решении научно-практических задач с использованием современного математического аппарата;	Тест № 1 Тест № 2

				формулировках ;			
ПК-2.3. Реализует инструментарий формально-логической концепции математики при построении физических и математических моделей	Обучающийся должен уметь: применять основы математической теории в решении научно-практических задач; функционально-логическую методологию математики к системному анализу взаимосвязей процессов и построению математических моделей	Не владеет инструментариум функционального анализа для решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	Владеет недостаточно инструментариум функционального анализа для решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	Хорошо владеет инструментариум функционального анализа для решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	Уверенно владеет инструментариум функционального анализа для решения математических задач в области прикладной математики и информатики;	Индивидуальные задания № 1 Индивидуальные задания № 2	
ПК-2.2. Применяет основы математической теории в решении	Обучающийся должен владеть: инструментариум формально-логической	Не умеет применять и совершенствовать современный аппарат функционально	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение	Сформированное умение применять и совершенствовать современный	Аудиторная контрольная работа № 1 Аудиторная контрольная работа № 2	

	научно-практических задач	концепции математики для идеализации и системного анализа связей при построении физических и математических моделей процессов и явлений	го анализа при решении научно-практических задач;	применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	применять и совершенствовать современный аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	аппарат функционального анализа при решении научно-практических задач;	
--	---------------------------	---	---	---	---	--	--

2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Тестовые задания

Перечень вопросов теста № 1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Знания»

Примеры теста верно/неверно.

1. Верно ли утверждение: «пересечение любого числа открытых множеств является открытым»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Нет».
2. Верно ли утверждение: «объединение любого числа открытых множеств является открытым»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
3. Верно ли утверждение: «все линейное нормированное пространство E - открытое »
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
4. Верно ли утверждение: «объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
5. Верно ли утверждение: «пополнение по соответствующей норме пространства со скалярным произведением является гильбертовым пространством»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
6. Верно ли утверждение: «пополнение нормированного пространства - банахово пространство»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
7. Верно ли утверждение: «любое счетное множество точек есть множество меры нуль на числовой прямой»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Да».
8. Верно ли утверждение: «фундаментальная в среднем последовательность есть последовательность сходящаяся в среднем»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.
Эталон: «Нет».
9. Верно ли утверждение: «обобщенная производная постоянной не равна нулю»
Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

10. Верно ли утверждение: «из сходимости в среднем следует равномерная сходимость»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

11. Верно ли утверждение: «открытое множество состоит из граничных и внутренних точек»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

12. Верно ли утверждение: «ортогональная система является линейно зависимой»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Нет».

13. Верно ли утверждение: «всякая фундаментальная последовательность сходится»

Форма ответа: 1) да; 2) нет.

Эталон: «Да».

Примеры теста множественный выбор

1. Выберите неравенство Гельдера:

$$1) \sum_{i=1}^m |\xi_i \eta_i| \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^q)^{1/p}, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$2) (\sum_{i=1}^m |\xi_i + \eta_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p)^{1/p};$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2;$$

$$4) \sum_{i=1}^m |\xi_i \eta_i| \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p)^{1/p}, p > 1.$$

Эталон: 1).

2. Выберите неравенство Бесселя:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2};$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|};$$

$$3) \sum_{k=1}^m |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2};$$

$$4) \sum_{k=1}^m |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|}.$$

Эталон: 1).

3. Выберите равенство Парсеваля-Стеклова:

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \|\phi_k\| = \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2};$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|};$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2};$$

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|}.$$

Эталон: 3).

4. Выберите неравенства треугольника:

- 1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- 2) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Эталон: 1).

5. Выберите равенства параллелограмма:

- 1) $|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2x^2 + 2y^2$;
- 2) $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;
- 3) $2\|x - y\|^2 + 2\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Эталон: 2).

6. Справедливо ли неравенство $\sum_{i=1}^m |\xi_i \eta_i| \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ при:

- 1) $p = \frac{1}{2}, q = 2$;
- 2) $p = 2, q = 2$;
- 3) $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$;
- 4) $p = q = 1$.

Эталон: 3).

7. Неравенство Парсеваля-Стеклова $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2, C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|}$ справедливо для системы ϕ_k :

- 1) ортогональной;
- 2) ортонормированной;
- 3) полной.

Эталон: 3).

8. Дана формула $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - \eta_k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k + \eta_k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2$ это:

- 1) равенство параллелограмма в L_2 ;
- 2) равенство Парсеваля-Стеклова;
- 3) равенство параллелограмма в $L_2[a, b]$.

Эталон: 1).

9. Дополните текст : множество \widehat{E} в линейном пространстве E называется линейным (...), если для любых $x, y \in \widehat{E}$ и любых скаляров λ, μ линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in \widehat{E}$.

- 1) многообразием;
- 2) изоморфизмом;
- 3) гомоморфизмом.

Эталон: 1).

10. Дополните текст : множество $M \subset E$ назовем ограниченным, если оно содержится в некотором (...), то есть существует число $C > 0 \forall x \in M, \|x\| \leq C$.

- 1) пространстве;
 - 2) подпространстве;
 - 3) шаре.
- Эталон: 3).

11. Дополните текст : множество $M \subset E$ называется (...), если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторую её окрестность.

- 1) открытым;
 - 2) закрытым;
 - 3) замкнутым.
- Эталон: 1).

12. Дополните текст : точка $x_0 \in M$ называется (...), если существует её окрестность содержащейся в множестве M .

- 1) внутренней;
 - 2) внешней;
 - 3) граничной.
- Эталон: 1).

13. Дополните текст : полное нормированное пространство называется (...).

- 1) банаховым;
- 2) евклидовым;
- 3) гильбертовым.

Эталон: 1).

14. Дополните текст : ряд называется (...), если сходится последовательность его частичных сумм.

- 1) сходящийся;
 - 2) расходящийся;
 - 3) числовым.
- Эталон: 1).

15. Дополните текст : нормированное пространство X называется (...), если в нем существует счетное, плотное в X множество.

- 1) банаховым;
 - 2) сепарабельным;
 - 3) полным.
- Эталон: 2).

16. Дополните текст : Множество в нормированном пространстве называется множеством(...) категории, если оно есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств.

- 1) 1 категории;
 - 2) 2 категории;
 - 3) 3 категории.
- Эталон: 1).

17. Дополните текст : пространство со скалярным произведением называется(...), если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением.

- 1) евклидовым;
 - 2) гильбертовым;
 - 3) сепарабельным.
- Эталон: 2).

18. Дополните текст : нормированные пространства X и \tilde{X} называются (...), если всюду на X определена линейная функция $\hat{x} = J(x)$ со значением в \tilde{X} , осуществляющая изоморфизм X и \tilde{X} как линейных пространств и такая, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что неравенство $\alpha\|x\| \leq \|J(x)\| \leq \beta\|x\|$ справедливо для всех $x \in X$.

- 1) изоморфными;
 - 2) изометричными;
 - 3) гомеоморфными.
- Эталон: 1).

19. Дополните текст : множество $M \subset [a,b]$ называется множеством(...), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная или счетная система отрезков $\{\alpha_n \beta_n\}$ такая, что

1) множество M покрывается отрезками этой системы, то есть $M \subset \bigcup_n [\alpha_n \beta_n]$;

2) сумма длин отрезков $[\alpha_n \beta_n]$ меньше ϵ , то есть $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \epsilon$.

1) замкнутым;

2) открытым;

3) меры ноль.

Эталон: 3).

20. Дополните текст : нормированное пространство X (...) в нормированное пространство \widehat{X} , если всюду на X задана линейная функция $J(x)$, причем существует постоянная $\beta > 0$ такая, что $\|J(x)\| \leq \beta \|x\|$ для всех $x \in X$.

1) вложено;

2) изоморфно;

3) изометрично.

Эталон: 3).

21. Дополните текст : если функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ (...), то их называют эквивалентными.

1) симметричны;

2) равны почти всюду;

3) рефлексивны.

Эталон: 2).

22. Установите верные аксиомы евклидова пространства:

1) $(x, y) = \overline{(x, y)}$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Эталон: 3).

Перечень вопросов теста № 2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Знания»

Примеры теста множественный выбор

1. Выберите неравенства Минковского:

1) $\int_a^b (|x(t) + y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b (|x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + \int_a^b (|y(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$;

2) $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt$;

3) $(\sum_{i=1}^m |\xi_i + \eta_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.

Эталон: 1), 3).

2. Выберите неравенства Коши-Буняковского:

1) $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$;

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

3) $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$;

4) $|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Эталон: 3), 4).

3. При каких значениях параметра p верна формула $\int_a^b (|x(t) + y(t)|^p dt)^{1/p} \leq \int_a^b (|x(t)|^p dt)^{1/p} + \int_a^b (|y(t)|^p dt)^{1/p}$:

1) $p > 1$;

2) $p = 1$;

3) $p < 1$.

Эталон: 1), 2).

4. Справедливо ли неравенство $(\sum_{i=1}^m |\xi_i + \eta_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^m |\xi_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^m |\eta_i|^p)^{1/p}$ при:

1) $p = \frac{1}{3}$;

2) $p = 3$;

3) $p = 1$.

Эталон: 2), 3).

5. Неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ справедливо в:

1) гильбертовом пространстве;

2) нормированном пространстве;

3) евклидовом пространстве;

4) банаховом пространстве.

Эталон: 1), 3).

6. Неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2$, $C_k = \frac{(x, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2}$ имеет место в:

1) гильбертовом пространстве;

2) нормированном пространстве;

3) евклидовом пространстве;

4) банаховом пространстве.

Эталон: 1), 3).

7. Укажите верные утверждения унитарного пространства:

1) $(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y)$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$;

4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Эталон: 1), 2), 4)

8. Укажите верные аксиомы нормированного пространства:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Эталон: 1), 3), 4).

9. Укажите верные аксиомы метрического пространства:

1) $\rho(\lambda x, y) = \lambda \rho(y, x)$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$;

4) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Эталон: 2), 3), 4).

Примеры теста на соответствие

1. Установите соответствие между колонками 1 и 2. (теорема и её формулировка)

1. Критерий Коши сходимости ряда	А. Ортогональная система $\{\phi_k\}$ из гильбертова пространства полна \Leftrightarrow её линейная оболочка L плотна в H .
2. Критерий плотности	Б. Всякое нормированное линейное пространство E . можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве \hat{E} .
3. Пополнение нормированное пространства	В. Пусть L – линейное многообразие в гильбертовом пространстве H ; L плотно в $H \Leftrightarrow L^\perp = \{0\}$.
4. Критерий полноты	Г. Пусть X – нормированное пространство. Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходилась, необходимо, а если X банахово, то и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ нашелся номер N такой, что при всех $n > N$ и при всех натуральных p выполнялось неравенство $\ \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\ < \epsilon$.

Эталон: 1-Г, 2-В, 3-Б, 4-А.

2. Установите соответствие между колонками 1 и 2. (пространства и их нормы)

1. Пространство \mathcal{C}_p	А. $\ x\ = \max_{t \in [a,b]} x(t) $
2. Пространство $C[a,b]$	Б. $\ x\ = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i ^p)^{\frac{1}{p}}$
3. Пространство $L[a,b]$	В. $\ x\ = \int_a^b x(t) dt$
4. Пространство $L_p[a,b]$	Г. $\ x\ = (\int_a^b x(t) ^p dt)^{\frac{1}{p}}$

Эталон: 1-Б, 2-А, 3-В, 4-Г.

3. Установите соответствие между колонками 1 и 2. (пространства и их нормы)

1. Пространство $L_p[a,b]$	А. $\ x\ = \left(\int_a^b x'^2(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}$
2. Пространство $H^1[a,b]$	Б. $\ x\ = \left(\int_a^b x^2(t) dt + \int_a^b x'^2(t) dt\right)^{\frac{1}{2}}$

3. Пространство $C^k[a,b]$	В. $\ x\ = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a,b]} x^{(i)}(t) $
4. Пространство $\dot{H}^1[a,b]$	Г. $\ x\ = \left(\int_a^b x(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$

Эталон: 1-Г, 2-Б, 3-В, 4-А.

4. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(пространства и их скалярное произведение)

1. Пространство $\dot{H}^1[a,b]$	А. $(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i$
2. Пространство $H^1[a,b]$	Б. $(u, v) = \int_a^b u(t)v(t) dt$
3. Пространство ℓ_2	В. $(u, v) = \int_a^b u'(x)v'(x) dx$
4. Пространство $L_2[a,b]$	Г. $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx + \int_a^b u'(x)v'(x) dx$

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

5. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. m -мерное линейное пространство	А. Если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов.
2. Бесконечномерное линейное пространство	Б. Если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.
3. Полное нормированное пространство	В. Если в нем существует счетное, плотное множество.
4. Сепарабельное нормированное пространство	Г. Если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимые.

Эталон: 1-Г, 2-А, 3-Б, 4-В.

6. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. Предел $F(x)$	А. Пусть $F(x)$ – оператор с областью определения $D(F) \subset X$ и с областью значений $R(F) \subset Y$, где X и Y - нормированные пространства. Оператор F будем называть (...), если он переводит всякое ограниченное в X множество из $D(F)$ во множество, ограниченное в Y .
2. Непрерывный в точке x_0	Б. Пусть дана последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Последовательность (...) к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, если для любого $x \in X$, $\ A_n x - Ax\ \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
3. Ограниченный	В. Элемент $y_0 \in Y$ называется (...) при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in S(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $\ x - x_0\ < \delta$, имеем $\ F(x) - y_0\ < \varepsilon$.
4. Сильно сходится	Г. Пусть дан оператор $F: X \rightarrow Y$, определенный в окрестности точки x_0 .

	Оператор F называется (...), если $F(x) \rightarrow F(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$.
--	---

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

7. Установите соответствие между колонками 1 и 2.(определение и их формулировка)

1. Равномерно выпуклое	А. Множество $M \subset X$ называется (...), если для каждого $f \in X^*$ числовое множество $\{\langle x, f \rangle, x \in M\}$ ограничено.
2. Слабо сходящейся	Б. Если $D(A^*) \supset D(A)$ и на $D(A)$ $A^*x = Ax$, то есть A^* является расширением A , то оператор называется (...).
3. Слабо ограниченный	В. Банахово пространство X называется (...), если для любых $\{x_n\} \subset X, \{y_n\} \subset X$ таких, что $\ x_n\ = 1, \ y_n\ = 1, \ x_n + y_n\ \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$ имеем $\ x_n - y_n\ \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
4. Симметричный	Г. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (...) к элементу $x \in X$, если $\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle$ для любого $f \in X^*$.

Эталон: 1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б.

Примеры теста короткий ответ

1. Вставьте в текст пропущенное слово: множество W в линейном пространстве E называется (...), если всякий раз из того, что $x_1, x_2 \in W$ следует, что W принадлежит отрезок, соединяющий x_1 и x_2 .

Эталон: выпуклым.

2. Вставьте в текст пропущенное слово: вещественный функционал $p(x)$ называется (...), если для любых $x_1, x_2 \in E$ и любых $t \in [0, 1]$ $p((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)p(x_1) + tp(x_2)$.

Эталон: выпуклым.

3. Вставьте в текст пропущенное слово: точка a называется (...) точкой множества M в линейном нормированном пространстве E , если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M , отличную от a .

Эталон: предельной.

4. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $M \subset E; E \setminus M = \{x \in E: x \notin M\}$ называется (...) множества M .

Эталон: дополнением.

5. Вставьте в текст пропущенное слово: последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (...), если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых номеров $n > N$ и любых натуральных p выполняется неравенство: $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Эталон: фундаментальной.

6. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть L – линейное многообразие в N . Совокупность всех элементов из N , ортогональных к L , называется (...) к L .

Эталон: ортогональным дополнением.

7. Вставьте в текст пропущенное слово: точка $x_0 \notin M$ называется (...) точкой M , если существует шар $S_r(x_0)$, не содержащий точек из M .

Эталон: внешней.

8. Вставьте в текст пропущенное слово: точка $x_0 \in E$ называется (...) точкой M , если в любом шаре $S_r(x_0)$ есть точки, принадлежащие M , и точки, принадлежащие \bar{M} .

Эталон: граничной.

9. Вставьте в текст пропущенное слово: два оператора $F: X \rightarrow Y$ и $\Phi: X \rightarrow Y$ называется (...), если совпадают их области определения ($D(F) = D(\Phi)$) и $F(x) = \Phi(x)$ для всех $x \in D$.

Эталон: равными.

10. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор Φ называется (...) оператора F , если $D(\Phi) \supset D(F)$ и $F(x) = \Phi(x)$ для всех $x \in D(F)$.

Эталон: расширением.

11. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор $y = F(x)$ называется (...), если каждому образу $y \in R(F)$ отвечает единственный прообраз $x = F^{-1}(y)$.

Эталон: взаимно однозначным.

12. Вставьте в текст пропущенное слово: если F взаимно однозначен, то формула $x = F^{-1}(y)$, где y пробегает R , определяет оператор $F^{-1}: Y \rightarrow X$, который называется (...).

Эталон: обратным.

13. Вставьте в текст пропущенное слово: оператор $A: X \rightarrow Y$ с областью определения $D(A)$ называется (...), если

1) $D(A)$ – линейное многообразие;

2) $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in D$ и любых скаляров λ_1, λ_2 .

Эталон: линейным.

14. Вставьте в текст пропущенное слово: линейный оператор A называется (...), если он непрерывен в точке $x = 0$.

Эталон: непрерывными.

15. Вставьте в текст пропущенное слово: если $Ax = 0$ для любого $x \in X$, то оператор A называется (...) оператором и обозначается 0 .

Эталон: нулевым.

16. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется (...) к A , если $AU = I_Y$.

Эталон: правым обратным.

17. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется (...) к A , если $VA = I_X$.

Эталон: левым обратным.

18. Вставьте в текст пропущенное слово: проекторы P_1 и P_2 называются (...), если $P_1 P_2 = 0$.

Эталон: ортогональными.

19. Вставьте в текст пропущенное слово: пусть X – вещественное нормированное пространство, а E – вещественная ось. Всякий оператор $f: X \rightarrow E$ называется (...).

Эталон: функционалом.

20. Является ли нормой функция $\|y\| = \max_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} |y(x)|$ в пространстве $C[a, b]$.

Эталон: нет.

21. Является ли нормой функция $\|y\| = |y(a)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|$ в пространстве $C^1[a, b]$.

Эталон: да.

22. Является ли нормой функция $\|y\| = |y(b) - y(a)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|$ в пространстве $C^1[a, b]$.

Эталон: нет.

23. Является ли нормой функция $\phi(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = |\arctg x|$.

Эталон: нет.

24. Является ли нормой функция $\|y\| = \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|$ в пространстве $C^1[a, b]$.

Эталон: да.

25. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$.

Эталон: нет.

26. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y) = \sqrt{|y - x|}$.

Эталон: да.

27. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y) \equiv 0$.

Эталон: да.

28. Является ли метрикой на числовой прямой функция $\rho(x, y) \equiv x - y$.

Эталон: да.

Примеры теста – числового

1. Найти норму функции $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$ в пространстве $C[0,2]$.

Эталон: $\sqrt{5}$.

2. Найти норму функции $y = 3\cos \pi x - \sin \pi x$ в пространстве $C[0,2]$.

Эталон: $\sqrt{10}$.

3. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $C[0,2]$.

Эталон: 2.

4. Найти норму функции $y = x^2 - 4x$ в пространстве $C[0,2]$.

Эталон: 4.

5. Найти норму функции $y = x^2 - 6x$ в пространстве $C[0,2]$.

Эталон: 9.

6. Найти норму функции $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$ в пространстве $H[0,2]$.

Эталон: $\sqrt{5}$.

7. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $H[0,2]$.

Эталон: $\frac{4}{\sqrt{15}}$.

8. Найти норму функции $y = x^3 - 1$ в пространстве $H[0,2]$.

Эталон: $\sqrt{\frac{86}{7}}$.

9. Найти норму функции $y = x^2 - 6x$ в пространстве $C^1[0,2]$.

Эталон: 15.

10. Найти норму функции $y = x^2 - x$ в пространстве $C^1[0,2]$.

Эталон: 5.

11. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t, y(t) = t$ в пространстве $L_2[0, \pi]$.
Эталон: $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$.
12. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t, y(t) = t$ в пространстве $H^1[0, \pi]$.
Эталон: $\sqrt{\frac{3}{\pi^2+3}}$.
13. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = 2(x(1) - x(0)), x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 4.
14. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t) dt, x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 1.
15. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0), x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 3.
16. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt, x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 2.
17. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = x(-1) + x(1), x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 2.
18. Найти норму оператора $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.
Эталон: 1.
19. Найти норму оператора $A: C[-1, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = x(t)$.
Эталон: 1.
20. Найти норму оператора $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = t^2 x(0)$.
Эталон: 1.
21. Найти норму оператора $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Ax(t) = x(t^2)$.
Эталон: 1.
22. Найти норму оператора $A: C^1[a, b] \rightarrow C[a, b], Ax(t) = x(t)$.
Эталон: 1.
23. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt, x \in C[-1, 1]$.
Эталон: 1.
24. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_0^1 tx(t) dt, x \in C^1[-1, 1]$.
Эталон: 1.
25. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt, x \in \widetilde{L}_1[-1, 1]$.
Эталон: 1.
26. Найти норму функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt, x \in \widetilde{L}_2[-1, 1]$.
Эталон: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Контрольные работы

Перечень заданий для аудиторной контрольной работы №1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Умения»

1. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ в пространстве $\widetilde{L}_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;
2. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является эллипсоид:

$$\left\{ x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \dots): \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1 \right\};$$

3. Для множества $M = \{x(t) \in \tilde{L}_2[-1,1] / x(t) = x(-t)\}$ описать M^\perp .

4. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X . Доказать, что функция $\rho_1(x, y) = \frac{4\rho(x, y)}{3 + 2\rho(x, y)}$ также является метрикой. Является ли пространство (X, ρ_1) полным, если (X, ρ) – полное метрическое пространство.

5. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{1}{e^{nt}} - \frac{1}{e^{(n+1)t}}$.

Перечень заданий для аудиторной контрольной работы №2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Умения»

1. Образуется ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $x(0) = 0$.
2. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве $C[-1,1]$, найти его норму и определить A^2 : $Ax(t) = 4x(t) + 5x(-t)$.
3. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1} : $Ax(t) = \int_0^1 \tau^2 x(\tau) d\tau + x(t)$.
4. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму: $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt[4]{t})$.
5. В пространстве $C[0,1]$ для элемента $x(t)$ определим последовательность операторов $(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t)$. Каков характер сходимости последовательности?
6. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f \rangle = \int_0^{1/2} x(t) dt$ в $C[0,1]$.
7. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f \rangle = \int_0^1 t^3 x(t^4) dt$ в пространствах $L_1[0,1], C[0,1]$.
8. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму: $\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ в l_2, l_1 .
9. Является ли линейным, непрерывным в $L_2[0,1]$ функционал
10. $\langle x, f \rangle = \int_0^1 t^2 |x(t)| dt$?

11.

Индивидуальные задания

Перечень индивидуальных заданий №1 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Владения»

Задача 1.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau;$$

Задача 2.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A: C[-1,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = x(t);$$

Задача 3.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = t^2 x(0);$$

Задача 4.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : C[0,1] \rightarrow C[0,1], Ax(t) = x(t^2);$$

Задача 5.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : C^1[a,b] \rightarrow C[a,b], Ax(t) = x(t);$$

Задача 6.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : C^1[a,b] \rightarrow C[a,b], Ax(t) = \frac{dx}{dt};$$

Задача 7.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau) d\tau;$$

Задача 8.

Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:

$$A : H^1[0,1] \rightarrow L_2[0,1], Ax(t) = x(t);$$

Задача 9.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство l_p^m ($p > 1$) столбцов $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in R$) с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p};$$

Задача 10.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство l_1 последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in R$),

удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$, с нормой $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$;

Задача 11.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство l_p ($p > 1$) последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in R$),

удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{1/p}$;

Задача 12.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство C_0 стремящихся к нулю последовательностей

$x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in R$) с нормой $\|x\| = \max_k |x_k|$;

Задача 13.

Убедиться, что в следующих случаях выполняются аксиомы нормы. Что означает сходимость последовательности? Пространство C сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in R$) с

нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$;

Задача 14.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве $M[a; b]$ всех ограниченных функций на $[a; b]$ с $\|x\| = \sup_{t \in [a; b]} |x(t)|$;

Задача 15.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве K непрерывных на вещественной прямой финитных функций с $\|x\| = \max_t |x(t)|$;

Индивидуальные задания

Перечень индивидуальных заданий №2 для оценки уровня сформированности компетенции ПК-2 на этапе «Владения»

Задача 1.

Проверить аксиомы нормы, определить вид сходимости в пространстве $\tilde{L}_p[a; b]$ непрерывных на

$[a; b]$ функций с $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;

Задача 2.

Сходится ли в пространстве $C[0; 1]$ последовательность:

$$x_n(t) = t^n - t^{n+1};$$

Задача 3.

Сходится ли в пространстве $C[0; 1]$ последовательность:

$$x_n(t) = t^n - t^{2n};$$

Задача 4.

Сходится ли в пространстве $C[0;1]$ последовательность: $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$;

Задача 5.

Сходится ли в пространстве $C^1[0;1]$ последовательность:

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2};$$

Задача 6.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 |x(t)| dt \leq 1;$$

Задача 7.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1;$$

Задача 8.

Будет ли выпуклым в пространстве $C[0;1]$ множество непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию:

$$\max_{[0;1]} |x(t)| + \max_{[0;1]} |x'(t)| \leq 1;$$

Задача 9.

На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X - банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.

Задача 10.

В линейном пространстве $C[0, \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^\infty [x(t)]^2 e^{-t} dt$ сходится, положим

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t} dt. \text{ Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.}$$

Задача 11.

В линейном пространстве $C(-\infty; \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 e^{-t^2} dt$ сходится, положим

$$(x, y) = \int_{-\infty}^\infty x(t)y(t)e^{-t^2} dt. \text{ Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.}$$

Задача 12.

Доказать, что в пространстве $C[a;b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a;b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.

Планы семинарских занятий

1. Линейные нормированные пространства
2. Банаховы пространства
3. Пространства со скалярным произведением
4. Гильбертовы пространства
5. Метрические пространства
6. Пространства Лебега и Соболева
7. Непрерывность и ограниченность линейных операторов
8. Пространство ограниченных линейных операторов
9. Обратные операторы
10. Замкнутые операторы
11. Непрерывные линейные функционалы
12. Сопряженные пространства
13. Слабая сходимость, рефлексивность
14. Сопряженные операторы
15. Компактные множества в нормированных пространствах
16. Линейные вполне непрерывные операторы

Экзаменационные билеты

Структура экзаменационного билета:

экзаменационный билет состоит из двух теоретических вопросов и одной задачи. Список вопросов и задач к экзамену прилагается.

Перечень вопросов для экзамена:

1. Линейные пространства (определение и примеры л.п., линейная зависимость и линейная независимость элементов, конечномерные и бесконечномерные л.п.)
2. Линейные пространства (линейные многообразия, изоморфизм л.п., выпуклые множества в л.п.)
3. Нормированные пространства (определение и примеры н.п., метрические пространства, предел последовательности в н.п., неравенства Гельдера и Минковского для сумм и интегральные)
4. Анализ в н.п. (открытое и замкнутое множества, предельная точка множества, внешняя, внутренняя и граничная точки множества)
5. Анализ в н.п. (эквивалентность норм в конечномерных н.п., подпространства н.п., линейные многообразия, плотные в н.п., изоморфизм, изометрия и вложение н.п.)

6. Евклидовы пространства (определение и примеры е.п., неравенство Коши-Буняковского, ортогональные и ортонормированные системы, процесс ортогонализации Шмидта, свойства скалярного произведения)
7. Банаховы пространства (определение и примеры б.п., ряды в н.п. и б.п.)
8. Банаховы пространства (б.п. со счетным базисом и сепарабельные пространства, принцип вложенных шаров, множества I и II категории)
9. Гильбертовы пространства (определение и примеры г.п., расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества, расстояние от точки до подпространства, ортогональные дополнения)
10. Гильбертовы пространства (ряды Фурье в г.п., неравенство Бесселя, полные ортогональные системы, равенство Парсеваля, ортогональные разложения в г.п.)
11. Теорема о пополнении пространства Лебега. Пополнение пространств со скалярным произведением
12. Пространства Лебега
13. Изоморфизм, изометрия и вложение нормированных и банаховых пространств.
14. Интеграл Лебега (множества меры нуль, эквивалентные функции, сходимости почти всюду и сходимости в среднем, функции, интегрируемые по Лебегу)
15. Интеграл Лебега (основные свойства)
16. Интеграл Римана и интеграл Лебега
17. Пространства Соболева (определение)
18. Пространства Соболева ($H^1(a,b)$, обобщенная производная)
19. Пространства Соболева (теорема вложения, абсолютная непрерывность функций из $H^1(a,b)$)
20. Пространства Соболева $H^1(G)$, $H^0(G)$
21. Операторы (определение оператора, взаимно однозначные операторы, суперпозиция операторов, операторы в н.п., предел и непрерывность)
22. Линейные операторы (определение л.о., непрерывные л.о., ограниченные л.о., их эквивалентность, примеры л.о.)
23. Пространства л.о. (нормированное пространство $L(X,Y)$, равномерная сходимости л.о., ряды в $L(X,Y)$, пространство $L(X)$)
24. Пространства л.о. (сильная сходимости в $L(X,Y)$, принцип равномерной ограниченности)
25. Пространства л.о. (продолжение л.о. по непрерывности)
26. Обратные операторы (множество нулей $N(A)$, критерий существования ограниченного обратного оператора, теорема Банаха)
27. Обратные операторы (примеры о.о., левый и правый о.о.)
28. Прямая сумма б.п., график оператора, замкнутый оператор
29. Теорема Банаха о замкнутом графике и ее следствия, норма графика и эквивалентные ей нормы.
30. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.
31. Сопряженные пространства (два вида сходимости в сопряженном пространстве, теорема Рисса об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве)
32. Сопряженные пространства (рефлексивные пространства, слабая сходимости в нормированных пространствах).
33. Сопряженные и самосопряженные операторы (определение сопряженного оператора, самосопряженные операторы)
34. Сопряженные и самосопряженные операторы (неотрицательные операторы, определение симметрического оператора, операторы ортогонального проектирования)

35. Компактные множества в нормированном пространстве (компактные множества, бикомпактные множества)
36. Компактные множества в нормированном пространстве (компактные множества в нормированных пространствах, критерий компактности Хаусдорфа, следствия из теоремы Хаусдорфа)
37. Компактные множества в нормированном пространстве (компактность и конечномерность, слабая компактность)
38. Компактные множества в нормированном пространстве (теорема Арцела)
39. Линейные вполне непрерывные операторы (определение вполне непрерывного оператора, вполне непрерывные операторы и слабая сходимость)
40. Линейные вполне непрерывные операторы (теорема Шаудера, примеры вполне непрерывных операторов).

Перечень задач для экзамена:

1. Найти угол между элементами $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ в пространстве $\tilde{L}_2[0,1]$;
2. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является параллелепипед:
 - а. $\{x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \dots) : |x_n| < 2^{-n+1}\}$;
3. Для множества $M = \{x(t) \in \tilde{L}_2[-1,1] \mid x(t) = 0, t \geq 0\}$ описать M^\perp .
4. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X . Доказать, что функция $\rho_2(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ также является метрикой. Является ли пространство (X, ρ_2) полным, если (X, ρ) – полное метрическое пространство.
5. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{e^{nt}}{n} - \frac{e^{(n+1)t}}{n+1}$.
6. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $x(0) = 0$.
7. Найти угол между элементами $x(t) = tg t$, $y(t) = ctg t$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$;
8. Доказать, что в пространстве ℓ_2 выпуклым множеством является эллипсоид:
 - а. $\left\{x \in \ell_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\right\}$;
9. Для множества $M = \left\{x(t) \in \tilde{L}_2[0,1] : \int_0^1 x(t) dt = 0\right\}$ описать M^\perp .
10. Пусть $\rho(x, y)$ – метрика на множестве X . Доказать, что функция $\rho_2(x, y) = \ln(\rho(x, y) + 1)$ также является метрикой. Является ли пространство (X, ρ_2) полным, если (X, ρ) – полное метрическое пространство.
11. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{e^{nt}}{n} - \frac{e^{2nt}}{2n}$.
12. Образует ли в пространстве $C[-1,1]$ подпространство множество функций, удовлетворяющих условию: $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$.
13. Найти угол между элементами $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-t}$ в пространстве $\tilde{L}_2[0,1]$;
14. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

15. Найти угол между элементами $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ в пространстве $\tilde{L}_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
16. Сходится ли в пространстве $C[0,1]$ последовательность $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{2n}}{2n}$.
17. Является ли сходящейся в пространстве ℓ_2 последовательность
- $$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$
18. Является ли сходящейся в пространстве ℓ_3 последовательность
- $$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$
19. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию: $\int_0^1 |x(t)| dt \leq 1$
20. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию: $\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1$;
21. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X - банахово пространство. Доказать, что X является банаховым пространством и в другой норме.
22. В линейном пространстве $C[0, \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^\infty [x(t)]^2 e^{-t} dt$ сходится, положим $(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t} dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.
23. В линейном пространстве $C(-\infty; \infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 e^{-t^2} dt$ сходится, положим $(x, y) = \int_0^\infty x(t)y(t)e^{-t^2} dt$. Проверить выполнение аксиом скалярного произведения.
24. Доказать, что в пространстве $C[a; b]$ множество функций $x(t)$ таких, что для любого $t \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$, является открытым.
25. Образуют ли в пространстве $C[-1; 1]$ подпространство множество четных функций.
26. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0; 1]$ ($p \geq 1$), которым эта функция принадлежит.
27. Доказать, что множество $C[a; b]$ образует метрическое пространство, если под расстоянием между двумя элементами этого множества φ и ψ подразумевать
- $$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| dx$$
28. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
29. $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$;

30. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
31. $A: C[-1,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = x(t)$;
32. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
33. $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(0)$;
34. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
35. $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$;
36. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
37. $A: C^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$, $Ax(t) = x(t)$;
38. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
39. $A: C^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;
40. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
41. $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau) d\tau$;
42. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
43. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве $C[0,1]$, найти его норму и определить A^2 : $Ax(t) = 2x(t) + 3x(-t)$.
44. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1} : $Ax(t) = \int_0^1 x(\tau) d\tau + x(t)$.
45. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
 $A: L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt[3]{t})$.
46. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму:
 $x = x(t) \rightarrow \int_0^{1/2} x(t) dt$ в $L_2[0,1]$.
47. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму:
 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \xi_k$ в l_2 .
48. В пространстве l_1 для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ элемента определим последовательность операторов $A_n x = (0, 0, \dots, 0, \frac{\xi_{n+1}}{n}, \frac{\xi_{n+2}}{n}, \dots)$. Каков характер сходимости последовательности?
49. Доказать, что оператор является линейным ограниченным оператором в пространстве $C[0,1]$, найти его норму и определить A^2 : $Ax(t) = 3x(t) - 2x(-t)$.
50. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ непрерывно обратим и найти оператор A^{-1} : $Ax(t) = \int_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau + x(t)$.
51. Доказать, что оператор является линейным и ограниченным и найти его норму:
 $A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$, $Ax(t) = x(\sqrt{t})$.
52. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму:
 $x = x(t) \rightarrow \int_0^1 t^{-1/3} x(t) dt$ в $L_2[0,1]$.
53. Доказать, что функционал является линейным непрерывным и найти норму:
 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \rightarrow \xi_k - \xi_{k-1}$ в l_2 .
54. В пространстве l_1 для $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ элемента определим последовательность операторов $A_n x = (\frac{\xi_1}{n}, \frac{\xi_2}{n}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots)$. Каков характер сходимости последовательности?

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

Рейтинг-план дисциплины (при необходимости)

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный	Максимальный
Модуль 1			0	35
Текущий контроль			0	20
Аудиторная контрольная работа №1			0	20
Рубежный контроль			0	15
Тестирование №1	10	1	0	10
Индивидуальное задание №1	5	1	0	5
Модуль 2			0	35
Текущий контроль			0	20
Аудиторная контрольная работа №2			20	20
Рубежный контроль			0	15
Тестирование №2	10	1	0	10
Индивидуальное задание №2	5	1	0	5
Поощрительные баллы			0	10
Активность во время занятий				10
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
Посещение лекционных занятий			0	-6
Посещение практических занятий			0	-10
Итоговый контроль				30
экзамен				30

Оценочное средство	Описание	Критерии оценки

Аудиторная контрольная работа	Письменное выполнение заданий по вариантам в аудитории в установленное время (90 мин.)	Достаточно выполнить любые 4 задания из предлагаемых в контрольной работе. Максимальное количество баллов за каждое задание - 5 баллов.
Индивидуальное задание	Письменное домашнее выполнение индивидуальных заданий по графику	Достаточно выполнить любые 5 заданий из предлагаемых в индивидуальном задании. За каждое правильно выполненное задание ставится 1 балл.
Тестирование	Тестирование проводится с использованием дистанционного курса в системе Moodle.	Максимальное количество баллов за тестирование -10. Порядок начисления баллов определяется в системе Moodle в зависимости от сложности вопроса.

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = $k \times$ Максимальный балл,

где $k = 0,2$ при уровне освоения «неудовлетворительно», $k = 0,4$ при уровне освоения «удовлетворительно», $k = 0,8$ при уровне освоения «хорошо» и $k = 1$ при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов БашГУ:

На экзамене выставляется оценка:

- отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов,
- удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов,
- неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.