

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Сыров Игорь Анатольевич  
Должность: Директор  
Дата подписания: 21.08.2025 20:19:07  
Уникальный программный ключ:  
b683afe664d7e9f64175886cf9626a196149ad36

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО  
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Факультет Математики и информационных технологий  
Кафедра Математического моделирования

**Оценочные материалы по дисциплине (модулю)**

дисциплина **Методы вычислений**

**Блок Б1, обязательная часть, Б1.О.18**

цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

**02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем**

код наименование направления

Программа

**Сетевое программирование и администрирование информационных систем**

Форма обучения

**Очная**

Для поступивших на обучение в  
**2020 г.**

Разработчик (составитель)  
кандидат физико-математических наук, доцент  
**Беляева М. Б.**  
ученая степень, должность, ФИО

<b>1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)</b> .....	<b>3</b>
<b>2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)</b> .....	<b>7</b>
<b>3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания</b> .....	<b>34</b>

**1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)				Вид оценочного средства
			1	2	3	4	
			неуд.	удовл.	хорошо	отлично	
ОПК-2. Способен применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности	ОПК-2.3. Имеет навыки применения данного математического аппарата при решении конкретных задач.	Обучающийся должен знать: основные понятия численных методов, принципы их использования в компьютерном моделировании, при оценке качества, надежности и эффективности программных продуктов; способы применения численных методов в организации информационно	Отсутствие навыков	В целом успешное, но непоследовательное владение навыками использования численных методов для решения конкретных задач в предметных областях	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы во владении навыками использования численных методов для решения конкретных задач в предметных областях	Успешное и последовательное владение навыками использования численных методов для решения конкретных задач в предметных областях	Проверочная работа; лабораторная работа; контрольная работа

		й безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных комплексов.					
	ОПК-2.2. Умеет использовать этот аппарат в профессиональной деятельности.	Обучающийся должен уметь: применять численные методы для решения практических задач в профессиональной деятельности, выбирать требуемый метод в соответствии с особенностями задачи и имеющимися ограничениями на ее реализацию.	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение применять численные методы для решения практических задач в профессиональной деятельности, выбирать требуемый метод в соответствии с особенностями задачи и имеющимися ограничениями на ее реализацию	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять численные методы для решения практических задач в профессиональной деятельности, выбирать требуемый метод в соответствии с особенностями задачи и имеющимися ограничениями на ее реализацию	Сформированное умение применять численные методы для решения практических задач в профессиональной деятельности, выбирать требуемый метод в соответствии с особенностями задачи и имеющимися ограничениями на ее реализацию	Тестовые задания
	ОПК-2.1. Знает:	Обучающийся	Отсутствии	Неполные	Сформированны	Сформированны	Устный

	<p>математические основы программирования и языков программирования, организации баз данных и компьютерного моделирования; математические методы оценки качества, надежности и эффективности программных продуктов; математические методы организации информационной безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных комплексов.</p>	<p>должен владеть: навыками использования численных методов для решения конкретных задач в предметных областях.</p>	<p>е знаний</p>	<p>представления об основных понятиях численных методов, принципах их использования в компьютерном моделировании, при оценке качества, надежности и эффективности программных продуктов; способах применения численных методов в организации информационной безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных комплексов</p>	<p>е, но содержащие отдельные пробелы представления об основных понятиях численных методов, принципах их использования в компьютерном моделировании, при оценке качества, надежности и эффективности программных продуктов; способах применения численных методов в организации информационно й безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных комплексов</p>	<p>е систематические представления об основных понятиях численных методов, принципах их использования в компьютерном моделировании, при оценке качества, надежности и эффективности программных продуктов; способах применения численных методов в организации информационно й безопасности при разработке и эксплуатации программных продуктов и программных комплексов</p>	<p>опрос</p>
--	---	---	-----------------	---	---	--	--------------

--	--	--	--	--	--	--	--

## 2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

### Планы практических занятий

#### 5 семестр

##### Занятие №1 «Теория погрешностей» (2 ч.)

1. Основные сведения из теории погрешностей.
2. Вопросы классификации и специфики.
3. Виды погрешностей.
4. Полная погрешность задачи.
5. Особенности машинной арифметики.
6. Решение задач.

##### Занятие №2 «Основные теоретические сведения из линейной алгебры» (2 ч.)

1. Нормы векторов и матриц.
2. Основные числовые характеристики.
3. Системы линейных алгебраических уравнений.
4. Классификация методов.
5. Решение задач.

##### Занятие №3 «Точные методы решение систем линейных алгебраических уравнений» (2 ч.)

1. Точные методы.
2. Метод Гаусса последовательного исключения неизвестных.
3. Метод Гаусса LU разложения.
4. Уточнение решения полученного методом Гаусса.
5. Решение задач.

##### Занятие №4 «Точные методы решение систем линейных алгебраических уравнений» (2 ч.)

1. Нахождение определителя и обратной матрицы методом Гаусса.
2. Метод квадратного корня.
3. Схема Холецкого.
4. Метод вращений.
5. Метод прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.
6. Решение задач.

##### Занятие №5 «Итерационные методы решение систем линейных алгебраических уравнений» (2 ч.)

1. Итерационные методы.
2. Метод простых итераций.
3. Метод Зейделя.
4. Критерий сходимости, достаточные условия сходимости.
5. Решение задач.

##### Занятие №6 «Итерационные методы решение систем линейных алгебраических уравнений» (2 ч.)

1. Метод Якоби.
2. Критерий сходимости, достаточные условия сходимости.

3. Метод последовательной релаксации.
4. Обратная матрица.
5. Уточнение элементов обратной матрицы.
6. Решение задач.

#### Занятие №7 «Проблема собственных значений» (2 ч.)

1. Полная и неполная проблема.
2. Прямые и итерационные методы.
3. Метод Данилевского.
4. Метод Леверье.
5. Метод вращений Якоби.
6. Степенной метод.
7. Методы на основе мультипликативных разложений матриц.
8. Решение задач.

#### Занятие №8 «Скалярные нелинейные уравнения и системы» (2 ч.)

1. Итерационные численные методы решения уравнений с одним неизвестным: метод половинного деления (дихотомии), метод хорд, касательных (Ньютона), комбинированный метод хорд и касательных, метод простых итераций.
2. Система скалярных нелинейных уравнений: метод простых итераций, метод скорейшего спуска.
3. Решение задач.

#### **Критерии оценки (в баллах)**

- 2 балла выставляется студенту, если он правильно выполняет одно задание у доски и отвечает на дополнительные вопросы;

- 1 балл выставляется студенту, если он выполняет задание у доски при помощи наводящих вопросов и/или не отвечает на дополнительные вопросы;

- 0 баллов выставляется студенту, если он не может выполнить задание и ответить на дополнительные вопросы.

Максимальное количество баллов за практические задания -16.

### **6 семестр**

#### Занятие №1 «Численная интерполяция и аппроксимация» (2 ч.)

1. Основные определения.
2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
3. Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа.
4. Интерполяционный многочлен Ньютона.
5. Погрешность интерполяционной формулы Ньютона.
6. Решение задач.

#### Занятие №2 «Численная интерполяция и аппроксимация» (2 ч.)

1. Равномерная и неравномерная система узлов.
2. Узлы Чебышева.
3. Интерполяционные сплайн-функции.
4. Параболические сплайны.
5. Кубические сплайны.
6. Решение задач.

Занятие №3 «Среднеквадратическая аппроксимация» (2 ч.).

1. Наилучшее среднеквадратичное приближение функции алгебраическими многочленами.
2. Решение задач.

Занятие №4 «Среднеквадратическая аппроксимация» (2 ч.).

1. Многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля и их свойства.
2. Решение задач.

Занятие №5, 6 «Метод наименьших квадратов» (4 ч.)

1. Ортогональные многочлены.
2. Метод наименьших квадратов.
3. Решение задач.

Занятие №7, 8 «Квадратурные формулы интегрирования» (4 ч.)

1. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.
2. Формула прямоугольников.
3. Формула трапеций.
4. Формула Симпсона.
5. Остаточный член.
6. Решение задач.

Занятие №9, 10 «Квадратурные формулы наивысшей степени точности» (4 ч.)

1. Квадратурные формулы наивысшей степени точности.
2. Метод Гаусса.
3. Сходимость квадратурных процессов.
4. Решение задач.

Занятие №11 «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши» (2 ч.)

1. Интегрирование с помощью степенных рядов.
2. Метод последовательных приближений Пикара.
3. Метод Эйлера.
4. Методы Рунге-Кутты.
5. Решение задач.

Занятие №12 «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши» (2 ч.)

1. Методы Адамса-Башфорта.
2. Методы Адамса-Моултона.
3. Методы прогноза и коррекции.
4. Общий вид линейных многошаговых методов.
5. Разностные уравнения.
6. Устойчивость, неустойчивость, жесткость.
7. Решение задач.

Занятие №13 «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений Краевые задачи для ОДУ второго порядка» (2 ч.)

1. Постановка начально-граничной задачи для ОДУ второго порядка.
2. Методы решения приводящие к решению задачи Коши.
3. Метод редукции.
4. Метод пристрелки.
5. Решение задач.

Занятие №14 «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений Краевые задачи для ОДУ второго порядка» (2 ч.)

1. Метод дифференциальной прогонки.
2. Сеточные методы решения.
3. Построение конечно-разностного уравнения.
4. Метод сеток.
5. Решение задач.

Занятие №15 «Дифференциальные уравнения в частных производных» (2 ч.)

1. Начальные и краевые условия.
2. Классификация краевых задач.
3. Основные понятия теории разностных схем.
4. Аппроксимация, сходимость, устойчивость.
5. Метод левой прогонки решения краевой задачи для разностного уравнения второго порядка.
6. Метод правой прогонки для разностного уравнения второго порядка.
7. Решение задач.

Занятие №16 «Дифференциальные уравнения в частных производных» (2 ч.)

1. Метод Либмана решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности.
2. Метод сеток решения краевой задачи уравнения параболического типа.
3. Метод прогонки для решения уравнения теплопроводности.
4. Метод сеток решения краевой задачи уравнения колебания струны.
5. Решение задач.

**Задания для проверочной работы (задачи для практических занятий)**

1. Для заданной матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  и вектора  $f = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  :

а) Найти норму матрицы  $\|A\|_2$  и норму вектора  $\|f\|_2$ .

б) Осуществив LU-разложение матрицы A, найти ее определитель.

2. Для заданной матрицы  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$  и вектора  $f = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$  :

решить систему  $Ax = f$  методом Гаусса.

3. Для скалярного нелинейного уравнения  $10x - \sin(x) = 0$ 
  - а) Графически отделить ближайший к нулю корень уравнения;
  - б) Составить блок-схему (или программу) для нахождения корня методом простых итераций с точностью  $\varepsilon$ .

4. Протабулировать функцию  $y = \cos(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$  с шагом  $h = \pi/4$ . По найденной таблице найти значение многочлена Ньютона  $P_4(\pi/8)$  (1-я формула).

5. Для скалярного нелинейного уравнения  $(0.2x)^3 - \cos(x) = 0$

а) Графически отделить ближайший к нулю корень уравнения;

б) Составить блок-схему (или программу) для нахождения корня методом половинного деления с точностью  $\varepsilon$ .

6. Протабулировать функцию  $y = \sin(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$  с шагом  $h = \pi/4$ . По найденной таблице найти значение многочлена Лагранжа  $L_4(\pi/8)$ .

7. Составить блок-схему (или программу) вычисления интеграла  $\int_1^{10} \cos(x) dx$  методом Симпсона с  $n = 100$ .

8. Аппроксимировать дифференциальное уравнение  $7y''(x) - 2y'(x) + 10\cos(x) = 0$  в узле  $x_i$  равномерной сетки разностным уравнением со вторым порядком относительно шага.

9. Составить блок-схему (или программу) вычисления интеграла  $\int_2^{12} \sin(x) dx$  методом трапеций с  $n = 100$ .

10. Применяя метод Эйлера, найти решение задачи Коши  $\begin{cases} y' = 0.5xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ , в трех последовательных точках:  $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$

11. Для задачи Коши  $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$  выполнить один шаг длины 0.1 по методу Эйлера-Коши и оценить погрешность найденного значения по правилу Рунге.

12. Методом Рунге-Кутты 2 порядка точности найти решение системы дифференциальных уравнений  $\begin{cases} y' = z + 1 \\ z' = y - x \\ y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases}$  в двух последовательных точках  $x_1 = 0.1, x_2 = 0.2$ .

13. Записать расчетные формулы явного и неявного методов Эйлера для решения задачи Коши для системы двух ОДУ 1 порядка.

14. Методом конечных разностей найти с шагом  $h = 0.2$  решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - 5y = 10x \\ y(0) = 0, y(0.6) = 5. \end{cases}$$

15. Применяя метод Эйлера, найти решение задачи Коши  $\begin{cases} y' = 0.5xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ , в трех последовательных точках:  $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$

## Критерии оценки (в баллах)

- 1 балла выставляется студенту, если он правильно выполняет одно задание у доски и отвечает на дополнительные вопросы;

- 0 баллов выставляется студенту, если он не может выполнить задание и ответить на дополнительные вопросы.

## Задания для устного опроса

1. Назовите три основных источника погрешностей при решении задач на ЭВМ, их природу и способы уменьшения.
2. Назовите условия диагонального преобладания матрицы.
3. Какие матрицы называются ленточными?
4. Какая матрица называется эрмитовой?
5. Евклидова норма вектора и соответствующая (подчиненная) ей норма матрицы?
6. Выпишите величину (в виде формулы), которая определяет норму матрицы через норму вектора.
7. Что такое число обусловленности? Что оно оценивает?
8. Опишите свойства алгебраических и трансцендентных уравнений.
9. Для чего производится процедура отделения корней и предварительное исследование уравнений. Приведите пример.
10. Приведите примеры известных вам способов исследования нелинейных уравнений.
11. Опишите основные свойства прямых и итерационных методов решения уравнений.
12. Что понимают под сходимостью итерационной процедуры? Ответ поясните примерами.
13. Что такое область сходимости применительно к итерационной процедуре?
14. Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.
15. Основное условие интерполяции.
16. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.
17. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 формула). Оценка погрешности.
18. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (2 формула). Оценка погрешности.
19. Постановка задачи Коши. Дискретная задача Коши: основные понятия и определения (сетка, сеточные функции, численный метод, аппроксимация, сходимость).
20. Методы рядов Тейлора решения задачи Коши.
21. Численные методы решения задачи Коши : вывод формулы метода Эйлера, его геометрическая интерпретация, устойчивость, оценка погрешности, влияние вычислительной погрешности.
22. Модификации метода Эйлера второго порядка точности: вывод расчетных формул, геометрическая интерпретация методов. Оценка погрешности.
23. Методы Рунге-Кутты. Вывод формул. Оценка погрешности.
24. Явные одношаговые методы. Локальная и глобальная погрешности. Оценка погрешности по правилу Рунге. Организация программы с автоматическим выбором шага.

25. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений. Задача Коши для уравнения  $m$ -го порядка.
26. Приведите примеры задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?
27. Назовите основные различия, достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши.
28. Опишите решение задачи Коши методом Эйлера.
29. Опишите решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера.
30. Опишите решение задачи Коши методом Рунге-Кутты.
31. Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью? Приведите примеры методов разных порядков.
32. Как влияет размер шага при решении задачи Коши на погрешность результата? Как работает процедура автоматического выбора шага?
33. Что такое «главный» (ведущий) элемент в методе Гаусса последовательного исключения неизвестных переменных?
34. Что такое спектр матрицы? Что такое собственная пара?
35. Дайте определение собственного вектора и соответствующего ему собственного значения матрицы.
36. Что такое характеристический многочлен?
37. Что такое вековое уравнение?
38. Что такое след матрицы?
39. Сколько всего может быть у матрицы  $A_{n \times n}$  собственных значений? Собственных векторов?
40. В каком диапазоне лежит весь спектр матрицы?
41. Спектр каких матриц состоит из их диагональных элементов?
42. Что вы можете сказать о сумме собственных значений матрицы? О произведении?
43. Перечислите основные свойства собственных значений и векторов?
44. Что такое преобразование подобия? Матрица подобия?
45. Жорданова форма матрицы?
46. Определение матрицы с простой структурой?
47. Какие матрицы имеют простую структуру?
48. Что вы можете сказать о собственных значениях и собственных векторах матрицы простой структуры?
49. Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (общие положения).
50. Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.
51. Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.
52. Формула Ньютона численного интегрирования. Общая формула Ньютона.
53. Приведите примеры задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?
54. Назовите основные различия, достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши.
55. Опишите решение задачи Коши методом Эйлера.
56. Опишите решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера.
57. Опишите решение задачи Коши методом Рунге-Кутты.
58. Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью?
59. Приведите примеры методов разных порядков.
60. Как влияет размер шага при решении задачи Коши на погрешность результата? Как работает процедура автоматического выбора шага?

## Критерии оценки (в баллах)

- 1 балл выставляется студенту, если он отвечает на предложенный теоретический вопрос;
- 0 баллов выставляется студенту, если он не отвечает на предложенный теоретический вопрос.

### *Лабораторные работы с индивидуальным заданием*

#### 5 семестр

##### *Лабораторная работа №1*

Тема: Решение систем линейных алгебраических уравнений точными методами.

Цель: Изучить точные (прямые) численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Задание. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Вычислить решение системы для заданных в варианте коэффициентов методом Гаусса (LU-разложений).

##### *Лабораторная работа №2*

Тема: Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами.

Цель: Изучить итерационные численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Задание. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Вычислить решение системы для заданных в варианте коэффициентов методом простых итераций с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Указания к выполнению работ №1 и №2.

Подготовка к работе: Изучите методы решения СЛАУ на ЭВМ, используя рекомендуемую литературу.

Обратите особое внимание на следующие вопросы:

1. Виды СЛАУ и их основные свойства;
2. Основные свойства точных и итерационных методов решения СЛАУ;
3. Нахождение определителя и обратной матрицы.

При выполнении *лабораторной работы №2* в отчете показать, как исходная система преобразуется к системе с преобладающими диагональными коэффициентами, а затем к нормальному виду. Вслед за этим произвести проверку достаточных условий сходимости. В результате получить значение  $\alpha$ , которое используется в программе для проверки окончания цикла.

Вариант	i	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$b_i$
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,04	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60

### Лабораторная работа № 3

Тема: Численные методы нахождения собственных значений и собственных векторов.

Цель: Изучить численные методы решения полной и неполной проблемы собственных значений матриц.

Прямые и итерационные методы.

Метод Данилевского.

Метод Леверье.

Метод LU,

Метод вращений Якоби.

Степенной метод

#### Варианты заданий

1) Метод Данилевского. Показать справедливость равенства  $P_{BC}(\lambda) = \lambda^{m-n} P_{CB}(\lambda)$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ,  $C = (c_{ij})_{n \times m}$ ,  $m \geq n$ ,  $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$  – обозначение характеристического многочлена квадратной матрицы  $A$ .

2) Метод вращений Якоби. Показать, что каждое собственное число матрицы  $A$  лежит, по крайней мере, в одной из областей:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \left( \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \right)^\alpha \cdot \left( \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right)^{1-\alpha}, \quad i \neq j, \quad \alpha \in [0,1].$$

3) Метод  $LU$ -разложения. Проверить, что каждое собственное число матрицы  $A$  лежит, по крайней мере, в одной из следующих областей:

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \cdot \sum_{k \neq j} |a_{jk}|, \quad i \neq j.$$

4) Степенной метод. Показать, что для минимального и максимального собственных чисел симметричной матрицы  $A$  справедливы оценки:  $\lambda_{\min}(A) \leq \min_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$ ;  $\lambda_{\max}(A) \geq \max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}$ .

5) Метод  $QR$ -разложения. Показать, что если  $\langle \lambda | \mathbf{x} \rangle$  – собственная пара матрицы  $A$ , то  $\langle \frac{1}{\lambda} | \mathbf{x} \rangle$  – собственная пара оператора  $A^{-1}$ .

### Лабораторная работа № 4

Тема: Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Цель: Изучить численные методы решения нелинейных уравнений.

Итерационные численные методы решения уравнений с одним неизвестным:

метод половинного деления,

метод хорд, касательных, секущих, комбинированный метод хорд и касательных, метод простых итераций.

Система скалярных нелинейных уравнений.

Метод простых итераций.

Метод скорейшего спуска.

Обратите особое внимание на следующие вопросы:

- Виды уравнений и их основные свойства;
- Основные свойства аналитических и итерационных методов решения уравнений;
- Методы исследования уравнений и отделения корней;
- Итерационные методы поиска корней уравнения на ЭВМ.

### Варианты заданий

#### Вариант №1

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1.$$

#### Вариант №2

$$f(x) = x^4 + 1 - 2(1+x)^4.$$

#### Вариант №3

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} - \frac{6}{x^2 - 2x + 4}.$$

#### Вариант №4

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} - 8.$$

#### Вариант №5

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} - \sqrt[3]{x-8}.$$

### 6 семестр

#### *Лабораторная работа № 5*

Тема: Численная интерполяция функций

Цель: Изучить численные методы интерполирования функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Конечные и разделенные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 и 2 формулы). Узлы Чебышева. Сходимость интерполяционных процессов.

Задание: В соответствии с вариантом построить интерполяционный многочлен для заданной системы узлов.

#### *Лабораторная работа № 6*

Тема: Численное интегрирование

Цель: Изучить численные методы интегрирования функций. Подходы построения квадратурных формул. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формула трапеций. Формула Симпсона. Остаточный член. Квадратурные формулы наивысшей степени точности. Метод Гаусса.

Задание: В соответствии с вариантом построить процедуру вычисления определенного интеграла для заданной системы узлов.

### Варианты заданий для работ 5 и 6

1. Проверить, сходится ли равномерно интерполяционный с  $\ln(x)$  процесс для функции  $y = \frac{1}{x}$  на  $[0.01, 2]$  по системе узлов  $\{x_k\}_{k=0}^n$   $x_0=b, x_n=a, x_k = \frac{x_{k-1} + x_n}{2}, k = \overline{1, N-1}$   
Для проверки использовать норму  $\|y - \ln(x)\| = \int_a^b |y - \ln(x)| dx$  интеграл в которой считать по формуле трапеций с  $n=124$ .
2. Вычислив квадратурную формулу для системы узлов  $x_0=a, x_N=b$   
 $x_k = x_{k-1} + \frac{x_n - x_{k-1}}{2}, k = \overline{1, N-1}$ . Найти  $\int_a^b \ln(x) dx$ , где  $\ln(x)$  многочлен Лагранжа для функции  $f(x) = \sqrt{x+3}$  по  $n=7$  узлам Чебышева на  $[a, b]$ .
3. Вычислив квадратурную формулу для системы узлов ( $n=8$ ) Чебышева найти  $\int_a^b \ln^2(x) dx$  с точностью  $\varepsilon=0.01$   $\ln(x)$ -многочлен Лагранжа для функции  $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$  на  $[a, b]$ .
4. Подсчитать значение  $\ln(4.32)$  для функции  $f(x) = \int_0^x \ln(3t+2) dt$  по равной системе узлов на интервале  $[0;6]$  с шагом  $h=0.1$ . Интегралы считать по методу Гаусса с  $n=4$ .
5. Найти  $\int_a^b f(x) dx$  с двойным пересчетом, аппроксимируя  $f(x)$  многочленом Лагранжа по системе узлов  $\{x_k\}_0^n$   $x_k = x_{k-1} + \frac{x_n - x_{k-1}}{2}, k = \overline{1, n-1}$ .  $f(x)=e^x, a=0, b=5$ .

### Лабораторная работа № 7

Тема: Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача Коши.

Цель: Изучить численные методы решения дифференциальных уравнений и систем первого порядка. Задача Коши.

*Задача Коши* Интегрирование с помощью степенных рядов.

Метод последовательных приближений Пикара.

Метод Эйлера. Метод Хьюна.

Методы Рунге-Кутты.

Методы Адамса-Башфорта.

Методы Адамса-Моултона.

Методы прогноза и коррекции.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения  $y'=f(x,y)$  на отрезке  $[a;b]$  при заданном начальном условии  $y(a)=c$  и шаге интегрирования  $h$ :

Вариант	$f(x, y)$	$a$	$b$	$c$	$h$	Метод
1	$xy^3 - 2$	4	5	0,7	0,1	Эйлера
2	$\sqrt{4x^2 + 1} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2	Хьюна
3	$\cos(1,5 - y^2) - 1,3$	-1	1	0,2	0,2	Рунге-Кутта классический
4	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1,2	0,1	Рунге-Кутта 3/8
5	$e^{-(y^2+1)} + 2x$	0	0,5	0,3	0,05	Эйлера

### Лабораторная работа № 8

Тема: Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений Краевые задачи для ОДУ второго порядка.

Цель: Изучить численные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

Методы сведения к задаче Коши: метод «стрельбы», метод редукции, метод дифференциальной прогонки. Метод конечных разностей.

Решить краевую задачу для ОДУ 2-го порядка с точностью  $\varepsilon = 0.001$  с шагом  $h = 0.1$ .

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x;$ $\begin{cases} y(0.7) = 0.5, \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1.2 \end{cases}$	$y'' - xy' + 2y = x + 1;$ $\begin{cases} y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2, \\ y(1.2) = 1. \end{cases}$	$y'' - xy' + y = x + 1;$ $\begin{cases} y(0.5) + 2y'(0.5) = 1, \\ y'(0.8) = 1.2 \end{cases}$

### Критерии оценки (в баллах):

- 5 баллов выставляется студенту, если им выполнены все задания лабораторной работы, даны четкие разъяснения по программному коду, даны развернутые ответы на теоретические вопросы по соответствующему разделу;

- 4 балла выставляется студенту, если им выполнены все задания лабораторной работы, даны четкие разъяснения по программному коду, но даны не полные ответы на теоретические вопросы по соответствующему разделу;
  - 3 балла выставляется студенту, если им выполнены все задания лабораторной работы, даны четкие разъяснения по программному коду, не может ответить на теоретические вопросы по соответствующему разделу;
  - 2 балла выставляется студенту, если им выполнены все задания лабораторной работы, но не даны четкие разъяснения по программному коду, и/или не может ответить на теоретические вопросы по соответствующему разделу;
  - 1 балл выставляется студенту, если им выполнены не все задания лабораторной работы, и/или не разбирается в программном коде, и/или не может ответить на теоретические вопросы по соответствующему разделу;
  - 0 баллов выставляется студенту, если лабораторная работа не выполнена.
- Максимальное количество баллов за лабораторные работы -40 (за 5 и 6 семестры).

### Задания для контрольной работы

Описание: контрольная работа предназначена для проверки теоретических знаний и практических навыков в каждом модуле 5 и 6 семестров.

#### Варианты контрольной работы

##### Вариант 1

1. Метод Зейделя. Условие сходимости метода.
2. Методом LU-разложения для матрицы найти обратную, проверить умножением.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Методом Данилевского выписать характеристический многочлен для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- . Известно, что одно из собственных чисел целое. Найдите его.
4. Методом хорд найти положительный корень уравнения  $x^4 - 2x - 4 = 0$  с точностью до 0.01 (все корни лежат на  $[-3,3]$ ).
  5. Составить многочлен Лагранжа для следующей таблицы значений:

X	1	3	4	5
Y	-2	0	4	15

##### Вариант 2

1. Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.

2. Методом LU-разложения для матрицы найти обратную, проверить умножением.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Методом Данилевского выписать характеристический многочлен для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

. Известно, что одно из собственных чисел целое. Найдите его.

4. Методом касательных найти положительный корень уравнения  $x^4 - 2x - 4 = 0$  с точностью до 0.01 (все корни лежат на  $[-3,3]$ ).

5. Составить многочлен Лагранжа для следующей таблицы значений:

X	1	2	3	4
Y	2	3	4	5

#### Вариант 3.

1. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.

2. Решить СЛАУ  $Ax = b$  методом Зейделя с точностью до 0.01:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 8 \\ 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

3. Методом касательных найти положительный корень уравнения  $x^3 - 2x - 5 = 0$  с точностью до 0.1 (все корни лежат на  $[-3,3]$ ).

#### Вариант 4.

1. Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.

2. Методом Данилевского найти собственные значения и соответствующие собственные векторы для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Из таблицы

X	1	3	4	5
Y	-7	5	8	14

найти значение  $y$  при  $x=2.5$ , пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа.

**Критерии оценки (в баллах) каждого задания:**

- 21–25 баллов студенту выставляется, если он в полном объеме выполняет все задания;
- 16–20 баллов студенту выставляется, если он в полном объеме выполняет задания 1-4, и/или частично выполняет с недочетами задание 5;
- 11–15 баллов студенту выставляется, если он в полном объеме выполняет задания 1-3, и/или частично выполняет с недочетами задание 4-5;
- 6–10 баллов студенту выставляется, если он в полном объеме выполняет задания 1 и 2, и/или частично выполняет с недочетами задания 3-4;
- 1–5 баллов выставляется студенту, если он в полном объеме выполняет задание 1, и/или частично выполняет с недочетами задания 2-4;
- 0 баллов выставляется студенту, если не выполнено ни одно из 4-х заданий.

### **Тестирование**

Описание тестирования: тестирование предназначено для проверки теоретических знаний и практических навыков по каждому модулю в 5 и 6 семестрах.

#### 1. Чем вызвана неустранимая погрешность?

А) Тем, что математическая модель исследуемого объекта никогда не учитывает всех без исключения явлений, влияющих на состояние объекта, и тем, что входящие в задачу заданные параметры (числа или функции) измеряются с какой-либо ошибкой.

Б) Тем, что любые арифметические операции над числами производятся при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.

В) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.

#### 2. Определение относительной погрешности.

А) Пусть  $a^*$  - точное,  $a$  - приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a$  такая, что  $|a - a^*| \leq \delta_a$ .

Б) Пусть  $a^*$  -точное,  $a$  -приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a$  такая, что  $\delta_a = \sqrt{(a - a^*)/a}$ , ( $a \neq 0$ ).

В) Пусть  $a^*$  -точное,  $a$  -приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a = |(a - a^*)/a|$ , ( $a \neq 0$ ).

#### 3. Определение абсолютной погрешности.

А) Пусть  $a^*$  – точное,  $a$  – приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a$  такая, что  $|a - a^*| \leq \delta_a$ .

Б) Пусть  $a^*$  – точное,  $a$  – приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a$  такая, что  $\delta_a = \sqrt{(a - a^*)/a}$ , ( $a \neq 0$ ).

В) Пусть  $a^*$  – точное,  $a$  – приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения  $a$  называется величина  $\delta_a = |(a - a^*)/a|$ , ( $a \neq 0$ ).

4. Чем вызвана погрешность метода при численном решении поставленной задачи?

А) Тем, что математическая модель исследуемого объекта не может учитывать все без исключения явления, влияющие на состояние объекта.

Б) Тем, что любые арифметические операции над числами производятся при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.

В) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.

5. Какое утверждение верно:

А)  $\Delta(a^* - b^*) \leq \max(\Delta(a^*), \Delta(b^*))$

Б)  $\Delta(a^* - b^*) \leq \Delta(a^*) - \Delta(b^*)$

В)  $\Delta(a^* - b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Г)  $\Delta(a^* - b^*) \geq \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

6. В чем преимущество метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений перед методом простой итерации?

А) Дает больший выигрыш в точности, так как, во-первых, метод Зейделя существенно уменьшает число умножений и делений, во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов.

Б) Метод Зейделя является абсолютно сходящимся, т.е для него нет необходимости вводить достаточные условия сходимости в отличие от метода простой итерации.

В) Обычно данный метод дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Кроме того, метод Зейделя может оказаться удобным при программировании, так как при вычислении  $x_i^{(k+1)}$  нет необходимости хранить значения  $x_1^{(k)}$ ,  $x_2^{(k)}$ , ...,  $x_{i-1}^{(k)}$ .

- A) А
- Б) Б
- В) В

7. Для решения систем линейных алгебраических уравнений какого вида разработан метод прогонки?

А) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной (лишь малая доля элементов матрицы отлична от нуля) матрицей коэффициентов.

Б) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

В) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с апериодической матрицей коэффициентов.

- A) А
- Б) Б
- В) В

8. Почему метод простой итерации решения систем линейных алгебраических уравнений называется самоисправляющимся?

А) Потому что для данного метода вводятся достаточные условия сходимости.

Б) Потому что отдельная ошибка, допущенная при вычислениях, не отражается на конечном результате, поскольку ошибочное приближение рассматривается как новый начальный вектор.

В) Потому что при использовании данного метода строится отдельная процедура, исправляющая любые ошибки, допущенные при расчетах.

9. В чем отличие метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений от метода простой итерации?

А) Отличие в том, что на очередном шаге реализации метода Зейделя исключается не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, т.е. наибольший по модулю элемент.

Б) Отличие в том, что на очередном  $k$ -ом шаге реализации метода Зейделя исключается коэффициент при неизвестном  $x_k$ , называемый главным элементом на  $k$ -ом шаге исключения. Тем самым система линейных алгебраических уравнений приводится к треугольному виду.

В) Отличие в том, что при вычислении  $(k+1)$ -го приближения неизвестного  $x_i$  при  $i > 1$  используются уже вычисленные ранее  $(k+1)$ -е приближения неизвестных  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$ .

10. Евклидова норма матрицы определяется:

$$\text{А) } \|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$$

$$\text{Б) } \|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, j = \overline{1, n}$$

$$\text{В) } \|A\|_3 = \sqrt{\max_k (\lambda_k^2(A))}, k = \overline{1, n}$$

$$\text{Г) } \|A\|_4 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

11. Для достижения точности  $\varepsilon$  применяют следующий критерий окончания метода дихотомии:

$$\text{А) } b_n - a_n \leq 2\varepsilon, \bar{x} = \frac{(b_n + a_n)}{2}$$

$$\text{Б) } b_n - a_n \leq \varepsilon, \bar{x} = \frac{(b_n + a_n)}{2}$$

$$\text{В) } b_n - a_n \leq 2\varepsilon, \bar{x} = \frac{(b_n - a_n)}{2}$$

12. На рисунках представлены графики функций  $y = f(x)$  на интервале  $[a, b]$ . Методом хорд находится решение уравнения  $f(x) = 0$  на интервале  $[a, b]$ . Выберите вариант, для которого решение будет найдено с избытком.

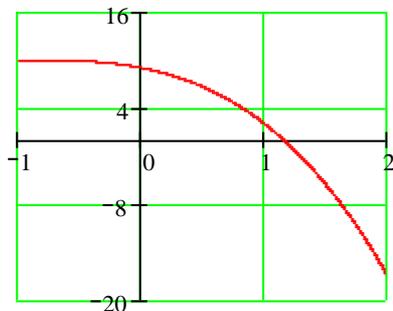


Рис.А

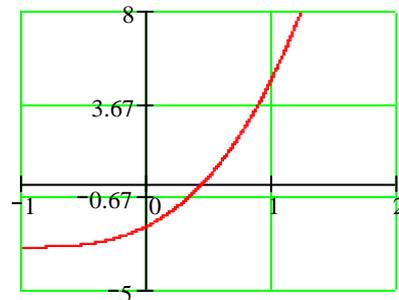


Рис.Б

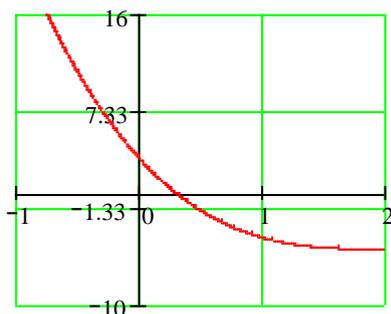


Рис.В



Рис.Г

А) А, Б

Б) Б, Г

В) В, Г

Г) А, Г

13. Сформулируйте постановку задачи интерполирования функции  $f(x)$ , заданной на сетке узлов  $\{x_i\}$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

А) Подобрать такую аппроксимирующую чтобы  $\|f(x_i) - \varphi(x_i)\| \rightarrow \min$ .

Б) Подобрать более простую функцию  $\varphi(x)$  такую, что  $\sum_i (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 \rightarrow \min$ .

В) Подобрать полиномиальную функцию  $\varphi(x)$ , такую что  $f(x_i) = \varphi(x_i)$ .

14. Назовите достоинства и недостатки интерполяционных формул Лагранжа.

А) Достоинство – метод наиболее прост в понимании и организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода – при увеличении числа узлов и соответственно степени интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново.

Б) Достоинство – метод относится к числу итерационных методов и имеет наибольшую точность интерполяции. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени.

В) Достоинство – использование многочленов невысокого порядка и вследствие этого малым накоплением погрешностей в процессе вычислений. Основной недостаток метода – из числа методов интерполяции наиболее сложен в и организации вычислительного процесса.

15. Приведите выражение для оценки погрешности интерполяции для формул Лагранжа и Ньютона.

А)  $|R_n| \leq \frac{12h}{b-a} M_2 |R_n(x)| \leq \frac{12hM_3}{b-a}$ , где  $M_2 = \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$ ,  $M_3 = \min_{\xi \in [a,b]} |f'''(\xi)|$ ,  $\xi$  – некоторая точка заданного промежутка  $[a,b]$ ,  $h$  – постоянное расстояние между соседними узлами интерполяции  $x_i, i = \overline{0, n}$ .

$$\text{Б) } |R_n| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) x_i |R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n),$$

где  $\xi$  есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы интерполяции  $x_i, i = \overline{0, n}$  и точку  $x$ , в которой находится значение сеточной функции  $f(x)$ .

В)  $R_n(x) = \sup(x^2 - x_i^2), i = \overline{0, n}$   $x_i$  – узлы интерполяции,  $x$  – некоторое значение сеточной функции  $f(x)$ .

16. Формула трапеции имеет вид:

$$\text{А) } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + \dots + 2y_{2m-1} \right)$$

$$\text{Б) } \int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

$$\text{В) } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

17. Формула Симпсона имеет вид:

$$\text{А) } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + \dots + 2y_{2m-1} \right)$$

$$\text{Б) } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

$$\text{В) } \int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

18. В какой форме можно получить решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Пикара?

А) график;

Б) таблица;

В) аналитическое выражение.

19. В чем достоинство неявных методов решения дифференциальных уравнений?

А) В том, что неявные методы абсолютно устойчивы и позволяют выбирать шаг по пространственной переменной независимо от шага по времени (или параметра, играющего роль времени).

Б) В том, что неявные методы являются более простыми в реализации в виде программного продукта.

В) В том, что неявные методы не требуют на каждом шаге по маршевой переменной (по времени) решения системы алгебраических уравнений.

20. Даны числа  $a = 23,37$  и  $b = 23,13$  с абсолютными погрешностями  $\Delta_a = \Delta_b = 0,21$ .  
Оценить погрешность их разности  $c = a - b$ .

А)  $\Delta_c = 0,42$

Б)  $\Delta_c = 0,21$

В)  $\Delta_c = 0,24$ .

21. Определить относительную погрешность приближенного числа  $b = 0,2574$  по ее абсолютной погрешности  $\Delta_b = 0,02$ , предварительно округлив число  $b$  до верных знаков.

А) Относительная погрешность 0,077.

Б) Относительная погрешность 0,078.

В) Относительная погрешность 0,080.

22. Длина и ширина аудитории, измеренные с точностью до 1 см, равны  $a = 12,49$  м и  $b = 5,12$  м. Оценить абсолютную погрешность в определении площади аудитории  $S = ab = 63,9488$  м<sup>2</sup>.

А) Абсолютная погрешность 0,1849

Б) Абсолютная погрешность 0,1762

В) Абсолютная погрешность 1,0012.

23. Найти относительную погрешность приближенного числа  $a = 4231,92$  по ее абсолютной погрешности  $\Delta_a = 2$ , предварительно округлив число  $a$  до верных знаков.

- А) Относительна погрешность 0,00051.
- Б) Относительна погрешность 0,00047.
- В) Относительна погрешность 0,00053.

24. Значащих цифр в числе  $a^* = 0,06460$

- А) 4
- Б) 5
- В) 6
- Г) 3

25. Найти методом деления отрезка пополам корень уравнения  $\cos(x) - x = 0$  на интервале  $[0,7; 0,8]$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

- А) корень уравнения 0,79
- Б) корень уравнения 0,78
- В) корень уравнения 0,74.

26. Дано нелинейное уравнение  $\sin x - 0,5x = 0$ . Определить методом деления отрезка пополам корень данного уравнения на интервале  $[1,7; 2]$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$

- А) корень уравнения 1,87.
- Б) корень уравнения 1,90.
- В) корень уравнения 1,96.

27. Отделите корни уравнения графически и укажите их количество  $2x + \lg(2x + 3) = 1$ .

- А) 1
- Б) 3;
- В) 2;
- Г) 4.

28. Между данными таблицы можно установить линейную зависимость  $y = 1,03x - 0,93$ .

$x$	1	1,5	2	3
$y$	0,2	0,5	1,1	2,2

Написать интерполяционный полином Лагранжа для функции  $f(x)$ , которая представлена четырьмя своими значениями:  $f(0) = -0,5$ ;  $f(0,1) = 0$ ;  $f(0,3) = 0,2$  и  $f(0,5) = 1$

А)  $P_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^2 - 11x - \frac{2}{13}$ .

Б)  $P_3(x) = \frac{25}{11}x^2 - \frac{73}{12}x + \frac{4}{7}$ .

В)  $P_3(x) = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - \frac{1}{2}$

29. Оценить погрешность вычисления  $R$  интеграла  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  по формуле трапеций при равномерном шаге  $h = 0,1$ , если  $|f''(x)| \leq 2$  на  $x \in [0,1]$ .

А)  $|R| < 0,04$

Б)  $|R| < 0,002$

В)  $|R| < 0,00015$

30. Определить величину шага  $h$  по оценке остаточного члена для вычисления интеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  по формуле трапеций с точностью до  $10^{-2}$ , если  $|f''(x)| \leq 2$  на  $x \in [0,1]$ ..

А)  $h = 1,49$

Б)  $h = 0,79$

В)  $h = 0,96$

Г)  $h = 0,24$

31. Применяя метод Эйлера, численно решить дифференциальное уравнение  $y' = 0,5xy$  с начальным условием  $y(0) = 1$  на отрезке  $[0;1]$  с шагом  $h = 0,2$ .

А)  $y(0,2) = 1,0000$ ;  $y(0,4) = 1,0420$ ;  $y(0,6) = 1,1952$ ;  $y(0,8) = 1,3646$ ;  $y(1,0) = 1,5644$ .

Б)  $y(0,2) = 1,0200$ ;  $y(0,4) = 1,0404$ ;  $y(0,6) = 1,0612$ ;  $y(0,8) = 1,0942$ ;  $y(1,0) = 1,1321$

В)  $y(0,2) = 1.0000$ ;  $y(0,4) = 1.0200$ ;  $y(0,6) = 1.0608$ ;  $y(0,8) = 1.1244$ ;  $y(1,0) = 1.2144$

32. Применяя метод Эйлера, найти решение обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = y - 2x/y$  на интервале  $[0; 1]$  с начальным условием  $y(0) = 1$ , выбрав шаг  $h = 0,2$ .

А)  $y(0,2)=1,2000$ ;  $y(0,4)=1,4205$ ;  $y(0,6)=1,9562$ ;  $y(0,8)=2,3646$ ;  $y(1,0)=3,0644$ .

Б)  $y(0,2)=0,9200$ ;  $y(0,4)=0,9040$ ;  $y(0,6)=0,8612$ ;  $y(0,8)=0,7942$ ;  $y(1,0)=0,7321$ .

В)  $y(0,2)=1,2000$ ;  $y(0,4)=1,3733$ ;  $y(0,6)=1,5294$ ;  $y(0,8)=1,6786$ ;  $y(1,0)=1,8237$ .

33. Значение функции  $y$ , определяемой дифференциальным уравнением  $y' = 1 + x + y^2$ , при начальном условии  $y(0) = 1$ , найденное методом Эйлера с шагом  $h = 0,1$  при  $x = 0,2$ .

А) 1,81;

Б) 1,45;

В) 1,56;

Г) 1,38.

34. Применяя метод Хьюна, найти решение обыкновенного дифференциального уравнения  $y' = y - 2x/y$  на интервале  $[0; 1]$  с начальным условием  $y(0) = 1$ , выбрав шаг  $h = 0,2$ .

А)  $y(0,2)=1,2000$ ;  $y(0,4)=1,4205$ ;  $y(0,6)=1,9562$ ;  $y(0,8)=2,3646$ ;  $y(1,0)=3,0644$ .

Б)  $y(0,2)=0,9200$ ;  $y(0,4)=0,9040$ ;  $y(0,6)=0,8612$ ;  $y(0,8)=0,7942$ ;  $y(1,0)=0,7321$ .

В)  $y(0,2)=1,2000$ ;  $y(0,4)=1,3733$ ;  $y(0,6)=1,5294$ ;  $y(0,8)=1,6786$ ;  $y(1,0)=1,8237$ .

**Критерии оценки (в баллах) каждого блока тестовых заданий:**

- 5 баллов выставляется студенту, если он правильно выполнил более 80% тестовых заданий блока;

- 4 балла выставляется студенту, если он правильно выполнил более 60% тестовых заданий блока;

- 3 балла выставляется студенту, если он правильно выполнил более 40% тестовых заданий блока;

- 2 балла выставляется студенту, если он правильно выполнил более 20% тестовых заданий блока;

- 1 балл выставляется студенту, если он правильно выполнил более 10% тестовых заданий блока;

- 0 баллов выставляется студенту, если студент правильно выполнил не более 10% тестовых заданий блока.

## Перечень вопросов к экзамену

### 5 семестр

1. Постановка задачи численного решения скалярного нелинейного уравнения.
2. Скалярное нелинейное уравнение. Метод половинного деления.
3. Скалярное нелинейное уравнение. Метод хорд.
4. Скалярное нелинейное уравнение. Метод касательных.
5. Скалярное нелинейное уравнение. Метод секущих.
6. Скалярное нелинейное уравнение. Комбинированный метод хорд и касательных.
7. Скалярное нелинейное уравнение. Метод простых итераций.
8. Система скалярных нелинейных уравнений. Метод простых итераций.
9. Система скалярных нелинейных уравнений. Метод наискорейшего спуска.
10. Постановка задачи численного построения приближенной функции для заданной.
11. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.
12. Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 и 2 формулы). Оценка погрешности.
13. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов.
14. Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Параболические сплайны.
15. Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Кубические сплайны.
16. Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (общие положения).
17. Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.
18. Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.
19. Квадратурные формулы наивысшей степени точности. Метод Гаусса.
20. Аппроксимация производных. Вывод формул численного дифференцирования.

### 6 семестр

1. Численные методы решения задачи Коши. Методы на основе разложения функции в ряд.
2. Численные методы решения задачи Коши. Метод Пикара.
3. Численные методы решения задачи Коши. Метод Эйлера. Метод Хьюна.
4. Численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты.
5. Численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса-Башфорта.
6. Численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса-Моултона.
7. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод «стрельбы».
8. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод редукции.
9. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод правой дифференциальной прогонки.
10. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод левой дифференциальной прогонки.
11. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод конечных разностей.

12. Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация, сходимость, устойчивость.
13. Постановка краевой задачи для ду в чп. Классификация методов.
14. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Метод Либмана.
15. Метод правой прогонки решения начально-краевой задачи для ДУ с ЧП параболического типа.
16. Метод левой прогонки начально-краевой задачи для ДУ с ЧП параболического типа.
17. Метод сеток для уравнения начально-краевой задачи для ДУ с ЧП гиперболического типа.
18. Приближение функций по методу наименьших квадратов. Линейная зависимость. Проверка адекватности.
19. Приближение функций по методу наименьших квадратов. Гиперболическая зависимость. Проверка адекватности.
20. Приближение функций по методу наименьших квадратов. Степенная зависимость. Проверка адекватности.

Структура экзаменационного билета: билет состоит из двух теоретических вопросов из перечня вопросов к экзамену. Первый вопрос соответствует тематике первого модуля, второй вопрос соответствует тематике первого модуля.

Образец экзаменационного билета:

1. Скалярное нелинейное уравнение. Метод касательных.
2. Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод левой дифференциальной прогонки.

**Критерии оценки (в баллах):**

- **25-30 баллов** выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.

- **17-24 баллов** выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.

- **10-16 баллов** выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.

- **0-10 баллов** выставляется студенту, если он отказался от ответа или не смог ответить на вопросы билета, ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

### 3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

5 семестр (экзамен)

№ п/п	Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
				Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Текущий контроль, в том числе</i>					<b>20</b>
1.	Аудиторная работа на практических занятиях (устный опрос)	1	2	0	2
2.	Аудиторная работа на практических занятиях (проверочная работа)	2	4	0	8
3.	Выполнение и отчет лабораторной работы	5	2	0	10
<i>Рубежный контроль, в том числе</i>				<b>0</b>	<b>15</b>
1.	Контрольная работа	2	5	0	10
2.	Тестирование	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<b>Модуль 2</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Текущий контроль, в том числе</i>					<b>20</b>
1.	Аудиторная работа на практических занятиях (устный опрос)	1	2	0	2
2.	Аудиторная работа на практических занятиях (проверочная работа)	2	4	0	8
3.	Защита лабораторной работы	5	2	0	10
<i>Рубежный контроль, в том числе</i>				<b>0</b>	<b>15</b>
1.	Контрольная работа	2	5	0	10
2.	Тестирование	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Итоговый контроль</i>					
Экзамен		10	3	<b>0</b>	<b>30</b>
<b>Поощрительные баллы</b>					<b>10</b>
1.	Выступление на семинаре кафедры	5	1		5
2.	Участие в конференции	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>110</b>
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>					
1.	Посещение лекционных занятий			0	-6
2.	Посещение практических занятий			0	-10

6 семестр (экзамен)

№	Виды учебной деятельности	Балл за	Число	Баллы
---	---------------------------	---------	-------	-------

п/п	студентов	конкретное задание	заданий за семестр	Минимальный	Максимальный
<b>Модуль 1</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Текущий контроль, в том числе</i>					<b>20</b>
1.	Аудиторная работа на практических занятиях (устный опрос)	1	2	0	2
2.	Аудиторная работа на практических занятиях (проверочная работа)	1	8	0	8
3.	Выполнение и отчет лабораторной работы	5	2	0	10
<i>Рубежный контроль, в том числе</i>				<b>0</b>	<b>15</b>
1.	Контрольная работа	2	5	0	10
2.	Тестирование	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<b>Модуль 2</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Текущий контроль, в том числе</i>					<b>20</b>
1.	Аудиторная работа на практических занятиях (устный опрос)	1	2	0	2
2.	Аудиторная работа на практических занятиях (проверочная работа)	1	8	0	8
3.	Защита лабораторной работы	5	2	0	10
<i>Рубежный контроль, в том числе</i>				<b>0</b>	<b>15</b>
1.	Контрольная работа	2	5	0	10
2.	Тестирование	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>35</b>
<i>Итоговый контроль</i>					
Экзамен		10	3	<b>0</b>	<b>30</b>
<b>Поощрительные баллы</b>					<b>10</b>
1.	Выступление на семинаре кафедры	5	1		5
2.	Участие в конференции	5	1		5
<b>Итого</b>				<b>0</b>	<b>110</b>
<b>Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)</b>					
1.	Посещение лекционных занятий			0	-6
2.	Посещение практических занятий			0	-10

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае,

когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

$$\text{Рейтинговый балл} = k \times \text{Максимальный балл},$$

где  $k = 0,2$  при уровне освоения «неудовлетворительно»,  $k = 0,4$  при уровне освоения «удовлетворительно»,  $k = 0,8$  при уровне освоения «хорошо» и  $k = 1$  при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов УУНиТ:

На экзамене выставляется оценка:

- отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),
- хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов,
- удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов,
- неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.