СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ»

Факультет ***Математики и информационных технологий***
Кафедра ***Математического моделирования***

Оценочные материалы по дисциплине (модулю)

дисциплина ***Численные методы***

Блок Б1, обязательная часть, Б1.О.18
цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

01.03.02 ***Прикладная математика и информатика***
код наименование направления

Программа

Искусственный интеллект и анализ данных

Форма обучения

Очная

Для поступивших на обучение в
2023 г.

Разработчик (составитель)
кандидат физико-математических наук, доцент
Беляева М. Б.
ученая степень, должность, ФИО

Стерлитамак 2023

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Формируемая компетенция (с указанием кода)	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине (модулю)	Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)				Вид оценочного средства
1	2	3	4				5
			неуд.	удовл.	хорошо	отлично	
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	ОПК-2.1. Знание приемов написания и анализа алгоритмов и компьютерных программ.	Обучающийся должен: Знать основные понятия и принципы численных методов, методы и направлениями разработки современных методов численных расчетов, численные методы решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений.	Отсутствие знаний об основных понятиях и принципах численных методов; математических моделях, методах и направлениях разработки современных методов численных расчетов.	Неполные представления о понятийно-категориальном и терминологическом аппарате численных методов. Имеются лишь общие представление об основных понятиях и принципах применения численных методов.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о понятийно-категориальном и терминологическом аппарате численных методов; областях применения численных методов при решении прикладных задач	Сформированные систематические представления об основных понятиях и принципах численных методов; областях и направлениях разработки современных методов численных расчетов.	Тестирование. Коллоквиум

	ОПК-2.2. Способность анализировать и конструировать конкретные алгоритмы на языке высокого уровня для решения разнообразных математических задач на компьютере	Обучающийся должен: Уметь применять численные методы для решения практических задач; выбирать требуемый метод в соответствии с особенностями задачи и имеющимися ограничениями на реализацию.	Отсутствие умений применять существующие численные методы при расчетах в рамках построенной математической модели; применять полученные знания при решении конкретных задач.	В целом успешное, но не систематическое умение применять существующие численные методы при расчетах в рамках построенной математической модели; применять полученные знания при решении конкретных задач; ориентироваться в круге основных проблем, возникающих при численном решении практических задач	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение применять методологические принципы численных методов, применять полученные знания при решении конкретных задач; ориентироваться в круге основных проблем, возникающих при численном решении практических задач.	Сформированное умение применять методологические принципы, категории и термины методов вычислений к решению практических задач; ориентироваться в круге основных проблем, возникающих при численном решении практических задач.	Контрольная работа
	ОПК-2.3. Знание парадигм структурного,	Обучающийся должен владеть навыками анализа	Отсутствие навыков владения основными	В целом успешное, но непоследовательное владение	В целом успешное, но содержащее отдельные	Успешное и последовательное владение компьютерными	Лабораторная работа

	процедурно-модульного и объектно-ориентированного программирования на языке высокого уровня	современных численных методов; методами интерполирования и сглаживания экспериментальных данных; опытом выбора оптимального и оценки погрешностей реализованного численного метода	методологическими принципами применения численных методов, компьютерными технологиями и пакетами прикладных программ для реализации алгоритмов численного моделирования.	основными методологическими принципами применения численных методов, компьютерными технологиями и пакетами прикладных программ для реализации алгоритмов численного моделирования.	пробелы владение основными методологическими принципами применения численных методов, компьютерными технологиями и пакетами прикладных программ для реализации алгоритмов численного моделирования	технологиями и пакетами прикладных программ для реализации алгоритмов численного решения конкретных задач математики; навыками выбора оптимальных алгоритмов получения численного решения математических моделей	
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1. Знает математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.	Обучающийся должен знать: принципы построения и ограничения на применение вычислительных методов; способы контроля вычислений и оценки	Отсутствие знаний о современных методах формулировать и решать прикладные задачи численными методами; о методах приближенного	Неполные представления о современных методах формулировать и решать прикладные задачи численными методами; о методах приближенного	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления о современных методах формулировать и решать прикладные задачи	Сформированные систематические представления о современных методах формулировать и решать прикладные задачи численными методами; о	Тестирование

		погрешности конкретного вычислительного метода; преимущества и недостатки прямых и итерационных методов численного решения линейных, нелинейных и дифференциальных уравнений (систем).	решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем нелинейных уравнений; систем линейных алгебраических уравнений; численном дифференцировании; вычислении интегралов; численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений; интерполирования функций.	решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем нелинейных уравнений; систем линейных алгебраических уравнений; численном дифференцировании; вычислении интегралов; численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений; интерполирования функций.	численными методами; о методах приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем нелинейных уравнений; систем линейных алгебраических уравнений; численном дифференцировании; вычислении интегралов; численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений; интерполирования функций.	методах приближенного решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем нелинейных уравнений; систем линейных алгебраических уравнений; численном дифференцировании; вычислении интегралов; численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений; интерполирования функций.	
	ОПК-3.2. Умеет	Обучающийся должен уметь:	Отсутствие умений	В целом успешное, но не	В целом успешное, но	Сформированное умение	Контрольная работа

	применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	использовать имеющееся программное обеспечение для решения сложных задач с применением нескольких методов и оценивать источники погрешностей; методом наименьших квадратов находить коэффициенты аппроксимирующих функций, и т. п	выбирать средства реализации требований к программному обеспечению; ориентироваться в различных типах прикладных систем, основанных на использовании численных методах; использовать численные методы дифференцирования, интегрирования; использовать численные методы при решении задач аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функций.	систематическое умение выбирать средства реализации требований к программному обеспечению; ориентироваться в различных типах прикладных систем, основанных на использовании численных методах; использовать численные методы дифференцирования, интегрирования; использовать численные методы при решении задач аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функций	содержащее отдельные пробелы в умении реализации требований к программному обеспечению; ориентироваться в различных типах прикладных систем, основанных на использовании численных методах; использовать численные методы дифференцирования, интегрирования; использовать численные методы при решении задач аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функций.	выбирать средства реализации требований к программному обеспечению; ориентироваться в различных типах прикладных систем, основанных на использовании численных методов; использовать численные методы дифференцирования, интегрирования; использовать численные методы при решении задач аппроксимации, интерполяции и экстраполяции функций	
	ОПК-3.3.	Обучающийся	Отсутствие	В целом	В целом	Успешное и	Лаборатор

	Владеет навыками применения математического аппарата к исследуемым моделям на основе полученных знаний в области профессиональной деятельности.	должен владеть: навыками использования Internet-ресурсов для изучения и реализации новых численных методов при решении практических прикладных задач.	навыков исследования современных операционных сред и информационно – коммуникационных технологий для информатизации и автоматизации решения прикладных задач численными методами; навыками приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений; численного интегрирования и дифференцирова	успешное, но непоследовательное владение навыками анализа современных операционных сред и информационно – коммуникационных технологий для информатизации и автоматизации решения прикладных задач численными методами; навыками приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений; численного	успешное, но содержащее отдельные пробелы владение: анализа современных операционных сред и информационно – коммуникационных технологий для информатизации и автоматизации решения прикладных задач численными методами; навыками приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений;	последовательное владение навыками анализа современных операционных сред и информационно – коммуникационных технологий для информатизации и автоматизации решения прикладных задач численными методами; навыками приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений; численного интегрирования	ная работа

			ния; приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений;	интегрирования и дифференцирования; приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений.	численного интегрирования и дифференцирования; приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений.	и дифференцирования; приближенного численного решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и нелинейных уравнений.	

2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

ВИДЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ И ИХ ОТЧЕТНОСТИ.

Видами контроля знаний студентов и их отчетности являются:

тесты, коллоквиум – контроль над усвоением теоретического материала;

контрольные работы – контроль над усвоением практического материала;

лабораторные работы, отчет по индивидуальным вариантам лабораторных работ к каждой изученной теме – контроль над усвоением теоретического и практического материала.

Основной формой текущего контроля усвоения материала является защита студентами индивидуальных отчётов по каждой теме лабораторного практикума.

Кроме того, в течение курса предусмотрено проведение контрольных работ в виде теста для проверки усвоения материала лекций и вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение. Контрольные работы (тесты), охватывающая практически весь материал, проводятся по завершении изучения разделов.

Перечень заданий коллоквиума для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-2 на этапе «Знания»:

Перечень примерных вопросов и заданий проведения коллоквиума

Тема 1. Теория погрешностей.

Назовите три основных источника погрешностей при решении задач на ЭВМ, их природу и способы уменьшения.

Основные виды погрешности. Этапы «колеса Самарского».

Тема 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Что такое «главный» (ведущий) элемент в методе Гаусса последовательного исключения неизвестных переменных?

Назовите условия диагонального преобладания матрицы.

Какие матрицы называются ленточными?

Какая матрица называется эрмитовой?

Евклидова норма вектора и соответствующая (подчиненная) ей норма матрицы?

Выпишите величину (в виде формулы), которая определяет норму матрицы через норму вектора.

Что такое число обусловленности? Что оно оценивает?

Каноническая форма записи любого итерационного метода решения СЛАУ.

Какой итерационный процесс называется стационарным?

Какой итерационный процесс называется явным?

Какой итерационный процесс называется m-шаговым?

Какой итерационный процесс называется линейным?

Что такое невязка СЛАУ?

Найдите симметричную и комплексно-сопряженную для данной *.

Какая матрица называется положительно-определенной?

Перечислите условия (необходимые и/или достаточные) для положительной определенности матрицы.

Теорема об LU-разложении.

Дайте определение точного метода решения СЛАУ.

Дайте определение итерационного метода решения СЛАУ.

Сформулируйте условия сходимости МПИ (критерий).

Что вы можете сказать о методе последовательных релаксаций с параметром $\omega = 1$?

Метод Якоби и метод Зейделя. Что общего? Какие отличия?

Основные отличия (преимущества и недостатки) прямых и итерационных методов решения СЛАУ.

Тема 3. Решение проблемы собственных значений и векторов.

Что такое спектр матрицы? Что такое собственная пара?

Дайте определение собственного вектора и соответствующего ему собственного значения матрицы.

Что такое характеристический многочлен?

Что такое вековое уравнение?

Что такое след матрицы?

Сколько всего может быть у матрицы $A_{n \times n}$ собственных значение? Собственных векторов?

В каком диапазоне лежит весь спектр матрицы?

Спектр каких матриц состоит из их диагональных элементов?

Что вы можете сказать о сумме собственных значений матрицы? О произведении?

Перечислите основные свойства собственных значений и векторов?

Что такое преобразование подобия? Матрица подобия?

Жорданова форма матрицы?

Определение матрицы с простой структурой?

Какие матрицы имеют простую структуру?

Что вы можете сказать о с.зн. и с.в. матрицы простой структуры?

Перечислите известные вам методы решения полной проблемы с.зн. часной проблемы?

Суть степенного метода.

Суть методов основанных на LU-алгоритме, QR-алгоритме.

Что такое нормальная форма Фробениуса?

Суть метода Данилевского.

Дайте определение ортогональной матрицы унитарной?

Чему равен определитель ортогональной матрицы?

Что такое матрица вращения?

Суть метода вращений Якоби.

Тема 4. Решение скалярных нелинейных уравнений и систем.

Опишите свойства алгебраических и трансцендентных уравнений.

Для чего производится процедура отделения корней и предварительное исследование уравнений. Приведите пример.

Приведите примеры известных вам способов исследования нелинейных уравнений.

Опишите основные свойства прямых и итерационных методов решения уравнений.

Что понимают под сходимостью итерационной процедуры? Ответ поясните примерами.

Что такое область сходимости применительно к итерационной процедуре?

Поясните, что такое скорость сходимости и как она связана с эффективностью метода.

Опишите метод половинного деления.

Опишите метод хорд. Назовите его достоинства и недостатки.

Опишите метод секущих. Дайте его сравнительную характеристику.

Опишите метод касательных. Укажите его достоинства и недостатки.

Опишите метод простой итерации. Дайте его характеристику.

Приведите пример итерационного метода, использующего квадратичную интерполяцию для решения нелинейных уравнений на ЭВМ.

Какие специальные методы применяются для решения алгебраических уравнений?

Почему на практике часто применяют комбинированные алгоритмы, включающие в себя различные методы отыскания корней?

Расскажите об особенностях представления чисел в ЭВМ. Как влияет способ представления чисел в ЭВМ на точность расчетов?

Что такое машинный нуль, машинная бесконечность и машинное ε ? Как эти параметры влияют на точность расчетов на ЭВМ?

Для чего используется нормировка уравнений при их решении на ЭВМ?

Тема 5. Численная интерполяция.

Условие интерполяции.

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 формула). Оценка погрешности.

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (2 формула). Оценка погрешности.

Аппроксимация функций методом наименьших квадратов.

Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Кубические сплайны.

Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Параболические сплайны.

Тема 6.Численное интегрирование.

Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (общие положения).

Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.

Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.

Формула Ньютона численного интегрирования. Общая формула Ньютона.

Квадратурные формулы наивысшей степени точности. Метод Гаусса.

Интегрирование быстро осциллирующих функций. Косинус-преобразование Фурье.

Интегрирование быстро осциллирующих функций. Синус-преобразование Фурье.

Тема 7. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи Коши. Дискретная задача Коши: основные понятия и определения (сетка, сеточные функции, численный метод, аппроксимация, сходимость).

Методы рядов Тейлора решения задачи Коши.

Численные методы решения задачи Коши : вывод формулы метода Эйлера, его геометрическая интерпретация, устойчивость, оценка погрешности, влияние вычислительной погрешности.

Модификации метода Эйлера второго порядка точности: вывод расчетных формул, геометрическая интерпретация методов. Оценка погрешности.

Методы Рунге-Кутты. Вывод формул. Оценка погрешности.

Явные одношаговые методы. Локальная и глобальная погрешности. Оценка погрешности по правилу Рунге. Организация программы с автоматическим выбором шага.

Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений. Задача Коши для уравнения m-го порядка.

Аппроксимация, устойчивость и сходимость численных методов решения задачи Коши.

Неявный метод Эйлера.

Многошаговые методы. Вывод формул явного метода Адамса-Башфорта.

Многошаговые методы. Вывод формул неявного метода Адамса-Моултона.

Жесткие задачи и методы их решения.

Приведите примеры задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?

Назовите основные различия, достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши.

Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью? Приведите примеры методов разных порядков.

Как влияет размер шага при решении задачи Коши на погрешность результата? Как работает процедура автоматического выбора шага?

Составьте алгоритм решения задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка методом Эйлера.

Тема 8. Краевые задачи для ОДУ второго порядка.

Приведите примеры задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Чем отличаются формулировки задачи Коши и краевой задачи?

Назовите основные различия, достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши.

Опишите решение задачи Коши методом Эйлера.

Опишите решение задачи Коши модифицированным методом Эйлера.

Опишите решение задачи Коши методом Рунге-Кутта.

Что такое порядок точности метода и как он связан с его эффективностью? Приведите примеры методов разных порядков.

Как влияет размер шага при решении задачи Коши на погрешность результата? Как работает процедура автоматического выбора шага?

Составьте алгоритм решения задачи Коши для системы двух уравнений первого порядка методом Эйлера.

Опишите процедуру решения задачи Коши для уравнения второго порядка одношаговым методом.

Поясните понятие устойчивости решения задачи Коши.

Опишите решение задачи одним из многошаговых методов.

Опишите решение задачи Коши методом предиктор-корректор.

Приведите схему решения краевой задачи методом стрельбы с использованием метода деления отрезка пополам.

Приведите схему решения краевой задачи методом стрельбы для линейного дифференциального уравнения.

Тема 9. Решение дифференциальных уравнений в частных производных.

Приведите классификацию ДУЧП в зависимости от их математической природы и физического смысла.

Какого вида граничные условия используют в задачах с ДУЧП?

Каковы особенности численного решения ДУЧП эллиптического, гиперболического и параболического типа?

Какие виды сеток используются в методе конечных разностей? Каким образом строят на этих сетках разностные аппроксимации и соответствующие им шаблоны?

Какие прямые и итерационные методы используют для решения систем алгебраических уравнений в задачах с ДУЧП?

Постановка двухточечной краевой задачи. Основные теоремы о разрешимости и устойчивости дифференциальной задачи.

Дискретная двухточечная краевая задача. Теорема о существовании решения разностной схемы.

Дискретная двухточечная краевая задача. Принцип максимума для разностной схемы.

Дискретная двухточечная краевая задача. Теорема сравнения для разностной схемы.

Дискретная двухточечная краевая задача. Априорная оценка решения.

Дискретная двухточечная краевая задача. Устойчивость разностной схемы.

Дискретная двухточечная краевая задача. Аппроксимация и сходимость разностной схемы.

Опишите метод прогонки и его роль в решении задач с ДУЧП.

Дайте характеристику итерационных методов, используемых для решения систем алгебраических уравнений в задачах с ДУЧП.

Как задаются граничные условия? Каким образом задается начальное приближение при решении ДУЧП с использованием итерационных методов? Ответ поясните на примере решенной задачи.

Из каких соображений выбирают шаг сетки в методе конечных разностей?

Каковы источники погрешности при решении задачи с ДУЧП? Каким образом можно оценить погрешность результата численного решения?

В каких случаях может возникать неустойчивость решения задачи ? Как влияет выбор параметров сетки на устойчивость?

Что понимают под сходимостью процесса решения задачи? Ответ поясните на примере решенной задачи.

В чем заключается основное различие методы конечных разностей и метода конечных элементов?

Каким образом строят дискретную модель в методе конечных элементов? Каким образом строят аппроксимации решения?

Опишите последовательность решения задачи методом конечных элементов.

Метод конечных разностей для случая переменного коэффициента теплопроводности.

Аппроксимация граничных условий со вторым порядком точности.

Понятие явной и неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности.

Темы рефератов и методические рекомендации по их подготовке

Перечень тем рефератов для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-2 на этапе «Знания»

Примерные темы рефератов

Тема выбирается из числа предложенных или может быть определена самостоятельно по рекомендации научного руководителя. Реферат должен включать в себя оглавление, введение, основную часть, заключение, биографические справки об упоминаемых в тексте ученых и подробный библиографический список, составленный в соответствии со стандартными требованиями к оформлению литературы, в том числе к ссылкам на электронные ресурсы. Работа должна носить самостоятельный характер, в случае обнаружения откровенного плагиата (дословного цитирования без ссылок) реферат не засчитывается. Сдающий реферат должен продемонстрировать умение работать с литературой, отбирать и систематизировать материал, увязывать его с существующими математическими теориями и фактами общей истории.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, определяются цели и задачи реферата, приводятся характеристика проработанности темы в историко-математической литературе и краткий обзор использованных источников.

В основной части, разбитой на разделы или параграфы, излагаются основные факты, проводится их анализ, формулируются выводы (по разделам). Необходимо охарактеризовать современную ситуацию, связанную с рассматриваемой тематикой.

Заключение содержит итоговые выводы и, возможно, предположения о перспективах проведения дальнейших исследований по данной теме.

Биографические данные можно оформлять сносками или в качестве приложения к работе. Список литературы может быть составлен в алфавитном порядке или в порядке цитирования, в полном соответствии с государственными требованиями к библиографическому описанию. Ссылки в тексте должны быть оформлены также в соответствии со стандартными требованиями (с указанием номера публикации по библиографическому списку и страниц, откуда приводится цитата).

Подготовку реферата рекомендуется начинать с библиографического поиска (см. рекомендации к работе с литературой) и составления библиографического списка, а также подготовки плана работы. Каждый из намеченных пунктов плана должен опираться на различные источники, при этом желательно провести сравнительный анализ как результатов, полученных разными специалистами, так и взглядов на эту темы различных специалистов в области истории науки. Необходимо выявить предпосылки и отметить последствия анализируемых теорий, отметить философские и методологические особенности. Текст реферата должен быть связным, недопустимы повторения, фрагментарный пересказ разрозненных сведений и фактов.

Оформление реферата должно быть аккуратным, при использовании редакторов LaTeX или MS WORD рекомендуется шрифт 12 пт. Ориентировочный объем – не менее 15 страниц, при этом не допускается его искусственное увеличение за счет междустрочных интервалов. Титульный лист готовится в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению титульных листов курсовых работ. Ниже представлен примерный перечень тем рефератов по данной дисциплине:

Методы решения системы нелинейных уравнений.

Алгоритмы разложения специальных матриц.

Нахождение спектра специального линейного оператора.

Решение СЛАУ с разряженными матрицами большой размерности.

Решение некорректных задач для СЛАУ с переопределенными матрицами.

Квадратурные формулы наивысшей степени точности с весами.

Сравнительный анализ численных методов решения задачи Коши.

Разностные схемы на согласованных неравномерных сетках.

Методы решения двумерных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

Методы поиска собственных значений и векторов.

Квадратурные формулы наивысшей степени точности.

Интегрирование быстро-осциллирующих функций.

Методы решения интегральных уравнений.

Разработка программного средства реализации предложенного численного метода.

Тесты текущего контроля по дисциплине

«Численные методы»

Перечень тестовых заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-3 на этапе «Знания»:

1. Виды и методы нахождения погрешностей вычислений

Чем вызвана неустранимая погрешность?

А) Тем, что математическая модель исследуемого объекта никогда не учитывает всех без исключения явлений, влияющих на состояние объекта, и тем, что входящие в задачу заданные параметры (числа или функции) измеряются с какой-либо ошибкой.

Б) Тем, что любые арифметические операции над числами производится при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.

В) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.

Даны числа $a = 23{,}37$ и $b = 23{,}13$ с абсолютными погрешностями $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}21$. Оценить погрешность их разности $c = a - b$.

А) $\Delta_c = 0{,}42$

Б) $\Delta_c = 0{,}21$

В) $\Delta_c = 0{,}24$.

Определение относительной погрешности.

А) Пусть a^* - точное, a - приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения a называется величина δ_a такая, что $\left|a - a^*\right| \le \delta_a$.

Б) Пусть a^* -точное, a -приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения a называется величина δ_a такая, что $\delta_a = \sqrt{(a - a^*)/a},\ (a \neq 0)$.

В) Пусть a^* -точное, a -приближенное значение некоторого числа. Относительной погрешностью приближения a называется величина $\delta_a = |(a - a^*)/a|,\ (a \neq 0)$.

Определение абсолютной погрешности.

А) Пусть a^* – точное, a – приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения a называется величина δ_a такая, что $|a - a^*| \leq \delta_a$.

Б) Пусть a^* – точное, a – приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения a называется величина δ_a такая, что $\delta_a = \sqrt{(a - a^*)/a},\ (a \neq 0)$.

В) Пусть a^* –точное, a –приближенное значение некоторого числа. Абсолютной погрешностью приближения a называется величина $\delta_a = |(a - a^*)/a|,\ (a \neq 0)$.

Определить относительную погрешность приближенного числа $b = 0{,}2574$ по ее абсолютной погрешности $\Delta_b = 0{,}02$, предварительно округлив число b до верных знаков.

А) Относительная погрешность 0,077.

Б) Относительная погрешность 0,078.

В) Относительная погрешность 0,080.

Чем вызвана погрешность метода при численном решении поставленной задачи?

А) Тем, что математическая модель исследуемого объекта не может учитывать все без исключения явления, влияющие на состояние объекта.

Б) Тем, что любые арифметические операции над числами производятся при наличии ограниченного количества используемых для записи чисел разрядов позиционной системы исчисления.

В) Тем, что в результате применения численного метода могут быть получены не точные, а приближенные значения искомой функции, даже если все предписанные методом вычисления проделаны абсолютно точно.

Какое утверждение верное:

А) $\Delta(a^* - b^*) \le \max(\Delta(a^*), (\Delta(b^*))$

Б) $\Delta(a^* - b^*) \le \Delta(a^*) - \Delta(b^*)$

В) $\Delta(a^* - b^*) \le \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Г) $\Delta(a^* - b^*) \ge \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

Длина и ширина аудитории, измеренные с точностью до 1 см, равны $a = 12{,}49$ м и $b = 5{,}12$ м. Оценить абсолютную погрешность в определении площади аудитории $S = ab = 63{,}9488$ м2.

А) Абсолютная погрешность 0,1849

Б) Абсолютная погрешность 0,1762

В) Абсолютная погрешность 1,0012.

Найти относительную погрешность приближенного числа $a = 4231{,}92$ по ее абсолютной погрешности $\Delta_a = 2$, предварительно округлив число a до верных знаков.

А) Относительна погрешность 0,00051.

Б) Относительна погрешность 0,00047.

В) Относительна погрешность 0,00053.

Значащих цифр в числе $a^* = 0{,}06460$

А) 4

Б) 5

В) 6

Г) 3

2. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

В чем преимущество метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений перед методом простой итерации?

А) Дает больший выигрыш в точности, так как, во-первых, метод Зейделя существенно уменьшает число умножений и делений, во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов.

Б) Метод Зейделя является абсолютно сходящимся, т.е для него нет необходимости вводить достаточные условия сходимости в отличие от метода простой итерации.

В) Обычно данный метод дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Кроме того, метод Зейделя может оказаться удобным при программировании, так как при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет необходимости хранить значения $x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_{i-1}^{(k)}$.

А) А

Б) Б

В) В

Для решения систем линейных алгебраических уравнений какого вида разработан метод прогонки?

А) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной (лишь малая доля элементов матрицы отлична от нуля) матрицей коэффициентов.

Б) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

В) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с апериодической матрицей коэффициентов.

А) А

Б) Б

В) В

Почему метод простой итерации решения систем линейных алгебраических уравнений называется самоисправляющимся?

А) Потому что для данного метода вводятся достаточные условия сходимости.

Б) Потому что отдельная ошибка, допущенная при вычислениях, не отражается на конечном результате, поскольку ошибочное приближение рассматривается как новый начальный вектор.

В) Потому что при использовании данного метода строится отдельная процедура, исправляющая любые ошибки, допущенные при расчетах.

В чем отличие метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений от метода простой итерации?

А) Отличие в том, что на очередном шаге реализации метода Зейделя исключается не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, т.е. наибольший по модулю элемент.

Б) Отличие в том, что на очередном k-ом шаге реализации метода Зейделя исключается коэффициент при неизвестном x_k, называемый главным элементом на k-ом шаге исключения. Тем самым система линейных алгебраических уравнений приводится к треугольному виду.

В) Отличие в том, что при вычислении $(k+1)$-го приближения неизвестного x_i при $i>1$ используются уже вычисленные ранее $(k+1)$-е приближения неизвестных $x_0, x_1, ..., x_{i-1}$.

Евклидова норма матрицы определяется:

А) $\|A\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}$

Б) $\|A\|_2 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|, j = \overline{1,n}$

В) $\|A\|_3 = \sqrt{\max\limits_k (\lambda_k^2(A))},\ k = \overline{1,n}$

Г) $\|A\|_4 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3. Численные методы решения нелинейных скалярных уравнений

Для достижения точности ε применяют следующий критерий окончания метода дихотомии:

А) $b_n - a_n \le 2\varepsilon,\ \ \bar{x} = \frac{(b_n + a_n)}{2}$

Б) $b_n - a_n \le \varepsilon,\ \ \bar{x} = \frac{(b_n + a_n)}{2}$

В) $b_n - a_n \le 2\varepsilon,\ \ \bar{x} = \frac{(b_n - a_n)}{2}$

На рисунках представлены графики функций $y = f(x)$ на интервале $[a,b]$. Методом хорд находится решение уравнения $f(x)=0$ на интервале $[a,b]$. Выберите вариант, для которого решение будет найдено с избытком.

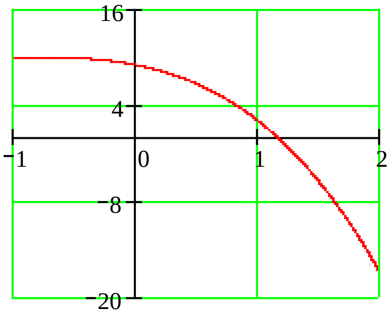


Рис.А

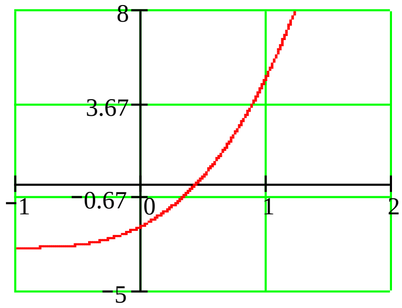


Рис.Б

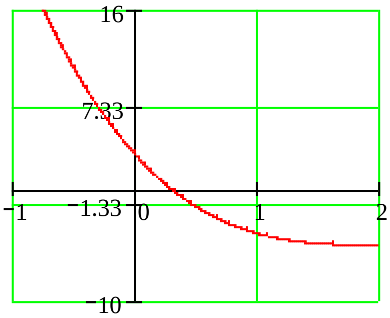


Рис.В

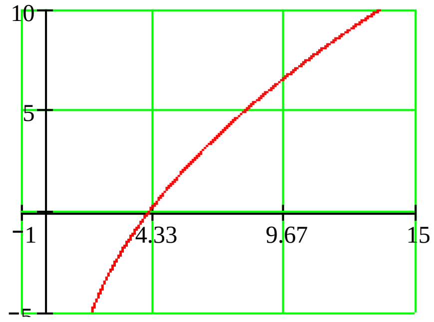


Рис.Г

А) А, Б

Б) Б, Г

В) В, Г

Г) А, Г

Найти методом деления отрезка пополам корень уравнения $\cos(x) - x = 0$ на интервале [0,7; 0,8] с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

А) корень уравнения 0,79

Б) корень уравнения 0,78

В) корень уравнения 0,74.

Дано нелинейное уравнение $\sin x - 0{,}5x = 0$. Определить методом деления отрезка пополам корень данного уравнения на интервале [1,7; 2] с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

А) корень уравнения 1,87.

Б) корень уравнения 1,90.

В) корень уравнения 1,96.

Отделите корни уравнения графически и укажите их количество $2x + \lg(2x+3) = 1$.

А) 1

Б) 3;

В) 2;

Г) 4.

4. Численное интерполирование и аппроксимация функций

Сформулируйте постановку задачи интерполирования функции $f(x)$, заданной на сетке узлов $\{x_i\},\ i = \overline{0,n}$.

Подобрать такую аппроксимирующую чтобы $\| f(x_i) - \varphi(x_i) \| \to \min$.

Подобрать более простую функцию $\varphi(x)$ такую, что $\sum_i (f(x_i) - \varphi(x_i))^2 \to \min$.

Подобрать полиномиальную функцию $\varphi(x)$, такую что $f(x_i) = \varphi(x_i)$.

Назовите достоинства и недостатки интерполяционных формул Лагранжа.

Достоинство – метод наиболее прост в понимании и организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода – при увеличении числа узлов и соответственно степени интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново.

Достоинство – метод относится к числу итерационных методов и имеет наибольшую точность интерполяции. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени.

Достоинство – использование многочленов невысокого порядка и вследствие этого малым накоплением погрешностей в процессе вычислений. Основной недостаток метода – из числа методов интерполяции наиболее сложен в и организации вычислительного процесса.

Приведите выражение для оценки погрешности интерполяции для формул Лагранжа и Ньютона.

$|R_n| \le \frac{12h}{b-a} M_2$ $|R_n(x)| \le \frac{12hM_3}{b-a}$, где $M_2 = \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$ $M_3 = \min_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$, ξ – некоторая точка заданного промежутка $[a,b]$, h – постоянное расстояние между соседними узлами интерполяции $x_i,\ i = \overline{0,n}$.

$|R_n| \le \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$ x_i $|R_n(x)| \le \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ ...\ (x-x_n)$, где ξ ξ есть некоторая точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы интерполяции $x_i,\ i=\overline{0,n}$ и точку x, в которой находится значение сеточной функции $f(x)$.

$R_n(x) = \sup(x^2 - x_i^2),\ i=\overline{0,n}$ x_i x_i – узлы интерполяции, x – некоторое значение сеточной функции $f(x)$ f(x).

Между данными таблицы можно установить линейную зависимость $y = 1{,}03x - 0{,}93$.

x	1	1,5	2	3
y	0,2	0,5	1,1	2,2

Написать интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$, которая представлена четырьмя своими значениями: $f(0) = -0{,}5;\ f(0{,}1) = 0;\ f(0{,}3) = 0{,}2$ и $f(0{,}5) = 1$

$P_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^2 - 11x - \frac{2}{13}$.

$P_3(x) = \frac{25}{11}x^2 - \frac{73}{12}x + \frac{4}{7}$.

$P_3(x) = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - \frac{1}{2}$

5. Методы численного интегрирования

Оценить погрешность вычисления R интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ по формуле трапеций при равномерном шаге $h = 0{,}1$, если $|f''(x)| \le 2$ на $x \in [0,1]$.

А) $|R| < 0.04$

Б) $|R| < 0.002$

В) $|R| < 0.00015$

Определить величину шага h по оценке остаточного члена для вычисления интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле трапеций с точностью до 10^{-2}, если $|f''(x)| \le 2$ на $x \in [0,1]$..

А) h = 1,49

Б) h =0,79

В) h= 0,96

Г) h=0,24

Формула трапеции имеет вид:

А) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + \ldots + 2y_{2m-1}\right)$

Б) $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$

В) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$

Формула Симпсона имеет вид:

А) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + \ldots + 2y_{2m-1}\right)$

Б) $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$

В) $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$

6. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача Коши

Применяя метод Эйлера, численно решить дифференциальное уравнение $y' = 0,5xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0;1]$ с шагом $h = 0,2$.

А) $y(0.2)=1.0000;\ y(0.4)=1.0420;\ y(0.6)=1.1952;\ y(0.8)=1.3646;\ y(1.0)=1.5644.$

Б) $y(0.2)=1.0200;\ y(0.4)=1.0404;\ y(0.6)=1.0612;\ y(0.8)=1.0942;\ y(1.0)=1.1321$

В) $y(0.2)=1.0000;\ y(0.4)=1.0200;\ y(0.6)=1.0608;\ y(0.8)=1.1244;\ y(1.0)=1.2144$

Применяя метод Эйлера, найти решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = y - 2x/y$ на интервале $[0;1]$ с начальным условием $y(0)=1$, выбрав шаг $h=0,2$.

А) y(0,2)=1,2000; y(0,4)=1,4205; y(0,6)=1,9562; y(0,8)=2,3646; y(1,0)=3,0644.

Б) y(0,2)=0,9200; y(0,4)=0,9040; y(0,6)=0,8612; y(0,8)=0,7942; y(1,0)=0,7321.

В) y(0,2)=1,2000; y(0,4)=1,3733; y(0,6)=1,5294; y(0,8)=1,6786; y(1,0)=1,8237.

В какой форме можно получить решение обыкновенного дифференциального уравнения по методу Пикара?

А) график;

Б) таблица;

В) аналитическое выражение.

Значение функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии $y(0)=1$, найденное методом Эйлера с шагом $h=0,1$ при $x=0,2$.

А) 1,81;

Б) 1,45;

В) 1,56;

Г) 1,38.

7. Решение дифференциальных уравнений в частных производных

В чем достоинство неявных методов решения дифференциальных уравнений?

В том, что неявные методы абсолютно устойчивы и позволяют выбирать шаг по пространственной переменной независимо от шага по времени (или параметра, играющего роль времени).

В том, что неявные методы являются более простыми в реализации в виде программного продукта.

В том, что неявные методы не требуют на каждом шаге по маршевой переменной (по времени) решения системы алгебраических уравнений.

Приведите разностный аналог уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

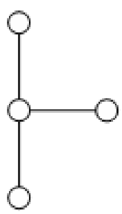
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_y} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = 0$$

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0$$

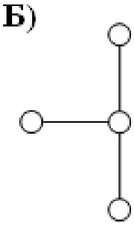
$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{h_y} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_x^2} = 0$$

В явной схеме $u_{ij+1} = \sigma u_{i-1j} + (1-2\sigma)u_{ij} + \sigma u_{i+1j}$ для решения уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с заданными начальным и граничными условиями используется шаблон:

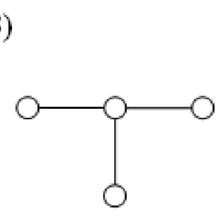
А)



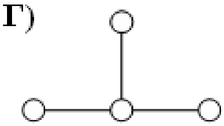
Б)



В)



Г)



Примерные задания к самостоятельной работе с индивидуальными заданиями

Перечень заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-2 на этапе «Умения»:

Для заданной матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и вектора $f = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

а) Найти норму матрицы $\|A\|_2$ и норму вектора $\|f\|_2$.

б) Осуществив LU-разложение матрицы A, найти ее определитель.

Для заданной матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ и вектора $f = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$:

решить систему $Ax = f$ методом Гаусса.

Для скалярного нелинейного уравнения $10x - \sin(x) = 0$

а) Графически отделить ближайший к нулю корень уравнения;

б) Составить блок-схему (или программу) для нахождения корня методом простых итераций с точностью ε.

Протабулировать функцию $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ с шагом $h = \pi/4$. По найденной таблице найти значение многочлена Ньютона $P_4(\pi/8)$ (1-я формула).

Для скалярного нелинейного уравнения $(0.2x)^3 - \cos(x) = 0$

а) Графически отделить ближайший к нулю корень уравнения;

б) Составить блок-схему (или программу) для нахождения корня методом половинного деления с точностью ε.

Протабулировать функцию $y = \sin(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ с шагом $h = \pi/4$. По найденной таблице найти значение многочлена Лагранжа $L_4(\pi/8)$.

Составить блок-схему (или программу) вычисления интеграла $\int_1^{10} \cos(x)dx$ методом Симпсона с $n = 100$.

Аппроксимировать дифференциальное уравнение $7y''(x) - 2y'(x) + 10\cos(x) = 0$ в узле x_i равномерной сетки разностным уравнением со вторым порядком относительно шага.

Составить блок-схему (или программу) вычисления интеграла $\int_{2}^{12} \sin(x)dx$ методом трапеций с $n=100$.

Применяя метод Эйлера, найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' = 0.5xy \\ y(0)=1 \end{cases}$, в трех последовательных точках: $x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6$

Для задачи Коши $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0)=1.5 \end{cases}$ выполнить один шаг длины 0.1 по методу Эйлера-Коши и оценить погрешность найденного значения по правилу Рунге.

Методом Рунге-Кутты 2 порядка точности найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} y' = z+1 \\ z' = y - x \\ y(0)=1, \;\; z(0)=1 \end{cases}$ в двух последовательных точках $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$.

Записать расчетные формулы явного и неявного методов Эйлера для решения задачи Коши для системы двух ОДУ 1 порядка.

Дана система ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами $y' = Ay$, причем известны собственные значения матрицы A:

a) $\lambda_1 = 0.1 + i, \lambda_2 = -0.6 + 2i$,

b) $\lambda_1 = 0.1 + i, \lambda_2 = -2000 + i$,

c) $\lambda_1 = 10 - 0.5i, \lambda_2 = -1000 + 2i$.

В каких случаях систему можно считать жесткой?

Методом конечных разностей найти с шагом h=0.2 решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - 5y = 10x \\ y(0)=0, \;\; y(0.6)=5. \end{cases}$$

Типовой вариант контрольной работы №1

Перечень практических контрольных заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-2 на этапе «Умения»

Вариант 1

Метод Зейделя. Условие сходимости метода.

Методом LU-разложения для матрицы найти обратную, проверить умножением.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0.01 (все корни лежат на $[-3,3]$).

Вариант 2

Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.

Методом Данилевского выписать характеристический многочлен для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

. Известно, что одно из собственных чисел целое. Найдите его.

Составить многочлен Лагранжа для следующей таблицы значений:

X	1	2	3	4
Y	2	3	4	5

Перечень практических контрольных заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-3 на этапе «Умения»

Типовой вариант контрольной работы №2

Вариант 1.

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.

Решить СЛАУ $Ax = b$ методом Зейделя с точностью до 0.01:

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 8 \\ 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Методом касательных найти положительный корень уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ с точностью до 0.1 (все корни лежат на $[-3,3]$).

Вариант 2.

Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.

Методом Данилевского найти собственные значения и соответствующие собственные векторы для матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из таблицы

X	1	3	4	5
Y	-7	5	8	14

найти значение у при x=2.5, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа.

Типовые задания для выполнения лабораторных работ

(полный текст лабораторных заданий представлен в дистанционном курсе «Численные методы» размещенном на сайте strbsu.ru

Перечень лабораторных заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-2 на этапе «Навыков и (или) опыта деятельности»

Указания к выполнению работ

1. Подготовка к работе

Изучите указанные численные методы используя литературу.

2. Порядок выполнения работы

Составьте алгоритм решения задачи и подготовьте программу на одном из языков программирования высокого уровня.

Выполните расчет на ЭВМ с помощью программы.

Решите задачу с помощью пакета MathCAD, MATLAB или другого. Сравните полученный результат с предыдущим решением.

Оформите отчет по работе.

3. Содержание отчета

Цель работы.

Задание.

Описание метода решения, краткие сведения из теории (формулы, алгоритм и т.п.).

Программа (распечатка), ее описание.

Результаты расчета при различных элементах матрицы.

Решение с помощью программы и специализированного пакета (MathCAD, MATLAB и т. п.), сравнение результатов.

Краткие выводы по работе.

Лабораторная работа №1,2

Тема: Решение систем линейных алгебраических уравнений.

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Задание 1. Выполнить задание, соответствующее варианту из таблицы.

Задание 2. Решить систему итерационным методом с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Задание 3. Выполнить задания 1,2, используя одно из инструментальных средств.

Сопоставьте найденное решение с полученными при выполнении заданий 1,2.

Цель: Изучить численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Точные методы решения СЛАУ

Метод Гаусса

Метод LU-разложений

Метод квадратного корня

Метод прогонки

Метод вращений Якоби

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простых итераций

Метод Якоби

Метод Зейделя

Метод релаксации

Нахождение обратной матрицы

Указания к выполнению работы

Подготовка к работе Изучите методы решения СЛАУ на ЭВМ, используя указанную литературу.

Обратите особое внимание на следующие вопросы:

1. Виды СЛАУ и их основные свойства;

2. Основные свойства точных и итерационных методов решения СЛАУ;

3. Нахождение определителя и обратной матрицы;

Вариант	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83
2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,04	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60

Пояснения к выполнению лабораторной работы № 2.

При выполнении задания 2 в отчете показать, как исходная система преобразуется к системе с преобладающими диагональными коэффициентами, а затем к нормальному виду. Вслед за этим произвести проверку достаточных условий сходимости (в смысле одной из метрик); в результате получить значение α, которое используется в программе для проверки окончания цикла.

Лабораторная работа № 3

Тема: Численные методы нахождения собственных значений и собственных векторов.

Полная и неполная проблема. Методы на основе мультипликативных разложений матриц.

Цель: Изучить численные методы решения полной и неполной проблемы собственных значений матриц.

Прямые и итерационные методы.

Метод Данилевского.

Метод Леверье.

Метод LU,

Метод вращений Якоби.

Степенной метод

Варианты заданий

Метод Данилевского. Показать справедливость равенства $P_{BC}(\lambda)=\lambda^{m-n}P_{CB}(\lambda)$, $B=(b_{ij})_{m\times n},\ C=(c_{ij})_{n\times m}$, $m\geq n$, $P_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)$ – обозначение характеристического многочлена квадратной матрицы А.

Метод вращений Якоби. Показать, что каждое собственное число матрицы А лежит, по крайней мере, в одной из областей: $|\lambda-a_{ii}|\leq\left(\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\right)^{\alpha}\cdot\left(\sum_{k\neq j}|a_{jk}|\right)^{1-\alpha},\ i\neq j,\ \alpha\in[0,1]$.

Метод LU-разложения. Проверить, что каждое собственное число матрицы А лежит, по крайней мере, в одной из следующих областей: $|\lambda-a_{ii}|\cdot|\lambda-a_{jj}|\leq\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\cdot\sum_{k\neq j}|a_{jk}|,\ i\neq j$.

Степенной метод. Показать, что для минимального и максимального собственных чисел симметричной матрицы А справедливы оценки: $\lambda_{\min}(A)\leq\min_{1\leq i\leq n}a_{ii};\ \lambda_{\max}(A)\geq\max_{1\leq i\leq n}a_{ii}$.

Метод QR-разложения. Показать, что если $\langle\lambda|\mathbf{x}\rangle$ – собственная пара матрицы A, то $\langle\frac{1}{\lambda}|\mathbf{x}\rangle$ – собственная пара оператора A^{-1}.

Перечень лабораторных заданий для оценки уровня сформированности компетенции ОПК-3 на этапе «Навыков и (или) опыта деятельности»

Лабораторная работа № 4

Тема: Решение нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Цель: Изучить численные методы решения нелинейных уравнений.

Итерационные численные методы решения уравнений с одним неизвестным:

метод половинного деления,

метод хорд, касательных, секущих, комбинированный метод хорд и касательных, метод простых итераций.

Система скалярных нелинейных уравнений.

Метод простых итераций.

Метод скорейшего спуска.

Обратите особое внимание на следующие вопросы:

Виды уравнений и их основные свойства;

Основные свойства аналитических и итерационных методов решения уравнений;

Методы исследования уравнений и отделения корней;

Итерационные методы поиска корней уравнения на ЭВМ.

Варианты заданий

ВАРИАНТ №1

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1.$$

ВАРИАНТ №2

$$f(x) = x^4 + 1 - 2(1+x)^4.$$

ВАРИАНТ №3

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} - \frac{6}{x^2 - 2x + 4}.$$

ВАРИАНТ №4

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} - 8.$$

ВАРИАНТ №5

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} - \sqrt[3]{x-8}.$$

Лабораторная работа № 5

Тема: Численная аппроксимация и численное интегрирование

Цель:

1. Изучить численные методы интерполирования функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Конечные и разделенные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 и 2 формулы). Узлы Чебышева. Сходимость интерполяционных процессов.

2. Изучить численные методы интегрирования функций. Подходы построения квадратурных формул. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формула трапеций. Формула Симпсона. Остаточный член. Квадратурные формулы наивысшей степени точности. Метод Гаусса.

Варианты заданий

Проверить, сходится ли равномерно интерполяционный с Ln(x) процесс для функции $y = \frac{1}{x}$ на [0.01, 2] по системе узлов $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ x0=b, xn=a, $x_k = \frac{x_{k-1} + x_n}{2}, \quad k = \overline{1, N-1}$

Для проверки использовать норму $\|y - Ln(x)\| = \int_a^b |y - Ln(x)| dx$ интеграл в которой считать по формуле трапеций с n=124.

Вычислив квадратурную формулу для системы узлов x0=a xN=b $x_k = x_{k-1} + \frac{x_n - x_{k-1}}{2}, \quad k = \overline{1, N-1}$. Найти $\int_a^b Ln(x)dx$, где Ln(x) многочлен Лагранжа для функции $f(x) = \sqrt{x+3}$ по n=7 узлам Чебышева на [a,b].

Вычислив квадратурную формулу для системы узлов (n=8)Чебышева найти $\int_a^b Ln^2(x)dx$ с точностью ε=0.01 Ln(x)-многочлен Лагранжа для функции $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$ на [a,b].

Подсчитать значение Ln(4.32) для функции $f(x) = \int_0^x \ln(3t+2)tdt$ по равной системе узлов на интервале [0;6] с шагом h=0.1. Интегралы считать по методу Гаусса с n=4.

Найти $\int_a^b f(x)dx$ с двойным пересчетом, аппроксимируя f(x) многочленом Лагранжа по системе узлов $\{x_k\}_0^n$ $x_k = x_{k-1} + \frac{x_n - x_{k-1}}{2}, \quad k = \overline{1, n-1}.$ f(x)=ex, a=0, b=5.

Лабораторная работа № 6

Тема: Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.

Цель: Изучить численные методы решения дифференциальных уравнений и систем первого порядка. Задача Коши.

Задача Коши Интегрирование с помощью степенных рядов.

Метод последовательных приближений Пикара.

Метод Эйлера. Метод Хьюна.

Методы Рунге-Кутта.

Методы Адамса-Башфорта.

Методы Адамса-Моултона.

Методы прогноза и коррекции.

1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения y'=f(x,y) на отрезке [a;b] при заданном начальном условии y(a)=c и шаге интегрирования h:

Вариант	$f(x,y)$	a	b	c	h	Метод
1	$xy^3 - ^2$	4	5	0,7	0,1	Эйлера
2	$\sqrt{4x^2+1} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2	Хьюна
3	$\cos(1{,}5 - y^2) - 1{,}3$	-1	1	0,2	0,2	Рунге-Кутта классический
4	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1,2	0,1	Рунге-Кутта 3/8
5	$e^{-(y^2+1)} + 2x$	0	0,5	0,3	0,05	Эйлера

Лабораторная работа № 7

Тема: Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений Краевые задачи для ОДУ второго порядка.

Цель: Изучить численные методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка.

Методы сведения к задаче Коши: метод «стрельбы», метод редукции, метод дифференциальной прогонки.

Метод конечных разностей.

Решить краевую задачу для ОДУ 2-го порядка с точностью $\varepsilon = 0.001$ с шагом $h = 0.1$.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
$y''+\frac{y'}{x}+2y=x;$ $\begin{cases} y(0.7)=0.5, \\ 2y(1)+3y'(1)=1.2 \end{cases}$	$y''-xy'+2y=x+1;$ $\begin{cases} y(0.9)-0.5y'(0.9)=2, \\ y(1.2)=1. \end{cases}$	$y''-xy'+y=x+1;$ $\begin{cases} y(0.5)+2y'(0.5)=1, \\ y'(0.8)=1.2 \end{cases}$

Лабораторная работа № 8

Тема: Дифференциальные уравнения в частных производных

Цель: Изучить численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Начальные и краевые условия.

Классификация краевых задач.

Основные понятия теории разностных схем.

Метод Либмана решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Метод сеток для уравнения параболического типа.

Метод прогонки для уравнения теплопроводности.

Метод сеток решения краевой задачи уравнения колебания струны.

Варианты заданий

Применяя метод усреднения Либмана, найти приближенное решение уравнения Лапласа с шагом h=1/N в квадрате с вершинами A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0) с краевыми условиями:(итерации проводить с точностью до 10-2)

ВАРИАНТ №1

u| AB=30y, u| BC=30(1-x2), u| CD=0, u| AD=0.

ВАРИАНТ №2

u| AB=30y, u| BC=30 $\cos\frac{\pi x}{2}$, u| CD=30 $\cos\frac{\pi y}{2}$, u| AD=30x.

ВАРИАНТ №3

u| AB=50y(1-y2), u| BC=0, u| CD=0, u| AD=50sinπx.

ВАРИАНТ №4

u| AB=20y, u| BC=20, u| CD=20y2, u| AD=50x(1-x).

ВАРИАНТ №5

u| AB=0, u| BC=50x(1-x), u| CD=50y(1-y2), u| AD=50x(1-x).

Примерный перечень вопросов к экзамену

Этапы решения задачи на ЭВМ. Виды погрешностей. Полная погрешность задачи. Корректность задач по Адамару и по Тихонову.

Точные методы решения СЛАУ. Теорема об LU-разложении квадратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Точные методы решения СЛАУ. Метод LU -разложений.

Точные методы решения СЛАУ. S^*DS -разложение эрмитовых матриц,. Метод квадратного корня решения СЛАУ схема Холецкого.

Метод правой прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Метод левой прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Точные методы решения СЛАУ. Метод вращений.

Метод наискорейшего спуска решения СЛАУ.

Нахождение и уточнение элементов обратной матрицы.

Нахождение определителя матрицы с использованием мультипликативных разложений.

Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простых итераций.

Итерационные методы решения СЛАУ. Метод Якоби.

Итерационные методы решения СЛАУ. Метод Зейделя.

Итерационные методы решения СЛАУ. Метод последовательной релаксации.

Проблема собственных значений. Метод Данилевского.

Проблема собственных значений. Метод вращений Якоби.

Проблема собственных значений. Степенной метод.

Проблема собственных значений. LU метод.

Скалярное нелинейное уравнение. Метод половинного деления.

Скалярное нелинейное уравнение. Метод хорд.

Скалярное нелинейное уравнение. Метод касательных.

Скалярное нелинейное уравнение. Метод секущих.

Скалярное нелинейное уравнение. Комбинированный метод хорд и касательных.

Скалярное нелинейное уравнение. Метод простых итераций.

Система скалярных нелинейных уравнений. Метод простых итераций.

Система скалярных нелинейных уравнений. Метод наискорейшего спуска.

Примерный перечень вопросов к экзамену

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка погрешности.

Аппроксимация функций. Интерполяционный многочлен Ньютона (1 и 2 формулы). Оценка погрешности.

Аппроксимация функций методом наименьших квадратов.

Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Параболические сплайны.

Сходимость интерполяционных процессов. Интерполирование сплайнами. Кубические сплайны.

Постановка задачи численного интегрирования. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (общие положения).

Формула трапеций. Общая формула трапеций. Остаточный член.

Формула Симпсона. Общая формула Симпсона. Остаточный член.

.Квадратурные формулы наивысшей степени точности. Метод Гаусса.

Аппроксимация производных. Вывод формул численного дифференцирования.

Численные методы решения задачи Коши. Методы на основе разложения функции в ряд.

Численные методы решения задачи Коши. Метод Пикара.

Численные методы решения задачи Коши. Метод Эйлера. Метод Хьюна.

Численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутта.

Численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса-Башфорта.

Численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса-Моултона.

Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод «стрельбы».

Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод редукции.

Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод правой дифференциальной прогонки.

Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод левой дифференциальной прогонки.

Методы решения краевых задач для ОДУ второго порядка. Метод конечных разностей.

Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация, сходимость, устойчивость.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Метод Либмана.

Метод правой прогонки решения начально-краевой задачи для ДУ с ЧП параболического типа.

Метод левой прогонки начально-краевой задачи для ДУ с ЧП параболического типа.

Метод сеток для уравнения начально-краевой задачи для ДУ с ЧП гиперболического типа.

Приближение функций по методу наименьших квадратов. Линейная зависимость. Проверка адекватности.

Приближение функций по методу наименьших квадратов. Гиперболическая зависимость. Проверка адекватности.

Приближение функций по методу наименьших квадратов. Степенная зависимость. Проверка адекватности.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

Критерии оценки (в баллах):

- 80-100 баллов выставляется студенту, если студент дал полные, развернутые ответы на все теоретические вопросы билета, продемонстрировал знание функциональных возможностей, терминологии, основных элементов, умение применять теоретические знания при выполнении практических заданий. Студент без затруднений ответил на все дополнительные вопросы.
- 60-79 баллов выставляется студенту, если студент раскрыл в основном теоретические вопросы, однако допущены неточности в определении основных понятий. При ответе на дополнительные вопросы допущены небольшие неточности.
- 45-59 баллов выставляется студенту, если при ответе на теоретические вопросы студентом допущено несколько существенных ошибок в толковании основных понятий. Логика и полнота ответа страдают заметными изъянами. Заметны пробелы в знании основных методов. Теоретические вопросы в целом изложены достаточно, но с пропусками материала. Имеются принципиальные ошибки в логике построения ответа на вопрос.
- менее 45 баллов выставляется студенту, если он отказался от ответа или не смог ответить на вопросы билета, ответ на теоретические вопросы свидетельствует о непонимании и крайне неполном знании основных понятий и методов. Студент не смог ответить ни на один дополнительный вопрос.

Балльно-рейтинговая система

Для каждого модуля разработаны задания для лабораторных работ, а также контрольные задания, которые выполняются студентом самостоятельно и в совокупности определяют уровень учебных достижений студента.

5-6 семестр на ДО					
№ п/п	**Виды учебной деятельности студентов**	**Балл за конкретное задание**	**Число заданий за семестр**	**Баллы**	
				Минимальный	**Максимальный**

Модуль 1					
Текущий контроль, в том числе				**0**	**20**
1.	Работа на практических занятиях	1	4	0	4
2.	Защита лабораторной работы	4	2	0	8
3.	Отчет по лабораторной работе	2	2	0	4
4.	Самостоятельная работа	1	4	0	4
Рубежный контроль, в том числе				**0**	**15**
1.	Коллоквиум	5	2	0	10
2.	Контрольная работа	5	1	0	5
			Итого	**0**	**35**
Модуль 2					
Текущий контроль, в том числе					**20**
1.	Работа на практических занятиях	1	4	0	4
2.	Защита лабораторной работы	4	2	0	8
3.	Отчет по лабораторной работе	2	2	0	4
4.	Реферат	4	1	0	4
Рубежный контроль, в том числе				**0**	**15**
1.	Тестирование	10	1	0	10
2	Контрольная работа	5	1	0	5
			Итого	**0**	**35**
Итоговый контроль					
	Экзамен	10	3	**0**	**30**
Поощрительные баллы					**10**
1.	Выступление на семинаре кафедры	5	1	0	5
2.	Публикация статей	5	1	0	5
			Итого	**0**	**110**
Посещаемость (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)					
1.	Посещение лекционных занятий			0	-6
2.	Посещение практических и лабораторных занятий			0	-10

Объем и уровень сформированности компетенций целиком или на различных этапах у обучающихся оцениваются по результатам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80 - 100%; «удовлетворительно» – выполнено 40 - 80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0 - 40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный баллРейтинговыйбалл $=$ k $\cdot$ Максимальныйбалл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», $\mathrm{k} = 0{,}6$ k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично».

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный балл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов УУНиТ:

На экзамене выставляется оценка:

• отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

• хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов,

• удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов,

• неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

На зачете выставляется оценка:

• зачтено - при накоплении от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

• не зачтено - при накоплении от 0 до 59 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.