b683afe664d7e9f64175886cf9626a198149ad36

СТЕРЛИТАМАКСКИЙ ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет ***Математики и информационных технологий***
Кафедра ***Фундаментальной математики***

Оценочные материалы по дисциплине (модулю)

дисциплина ***Геометрия***

Блок Б1, обязательная часть, Б1.О.16
цикл дисциплины и его часть (обязательная часть или часть, формируемая участниками образовательных отношений)

Направление

44.03.05 ***Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)***
код наименование направления

Программа

Математика, Информатика

Форма обучения

Очная

Для поступивших на обучение в
2019 г.

Разработчик (составитель)
профессор, доктор физико-математических наук
Михайлов П. Н.
ученая степень, должность, ФИО

Стерлитамак 2022

1. Перечень компетенций, индикаторов достижения компетенций и описание показателей и критериев оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)

Формируемая компетенция (с указанием кода)	**Код и наименование индикатора достижения компетенции**	**Результаты обучения по дисциплине (модулю)**	**Показатели и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**				**Вид оценочного средства**
1	**2**	**3**	**4**				**5**
			неуд.	**удовл.**	**хорошо**	**отлично**	
ПК-2. Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Использует знания основ математической теории и перспективных направлений развития современной математики; о широком спектре приложений математики и доступных обучающимся математических элементов этих приложений.	Знать определения основных понятий, утверждения и алгоритмы изучаемых разделов геометрии.	Обучающийся не знает и (или) не понимает определения основных понятий, утверждения и алгоритмы изучаемых разделов геометрии.	Обучающийся либо знает некоторые определения и утверждения определения основных понятий, утверждения и алгоритмы изучаемых разделов геометрии, либо знает большую часть, но при этом не показывает глубокого понимания материала.	Обучающийся знает определения и утверждения определения основных понятий, утверждения и алгоритмы изучаемых разделов геометрии, но при этом допускает неточности в формулировках.	Обучающийся показывает знание и понимание определений основных понятий, утверждений и алгоритмов изучаемых разделов геометрии	Устный опрос

	ПК-2.2. Применяет основы математической теории в решении научно-практических задач; функционально-логическую методологию математики к системному анализу взаимосвязей процессов и построению математических моделей.	Уметь, используя определения, свойства геометрических объектов, проводить связанные с ними исследования; применять векторы и метод координат к доказательству теорем и решению прикладных задач.	Обучающийся не умеет решать типовые задачи.	Обучающийся умеет решать некоторые типовые задачи и допускает ошибки.	Обучающийся умеет решать все типовые задачи, не всегда может дать обоснование применяемым методам решения.	Обучающийся решает как типовые задачи, так и задачи повышенной сложности.	Контрольная работа
	ПК-2.3. Реализует инструментарием формально-логической концепции математики для идеализации и системного анализа связей при построении физических и	Владеть навыками решения типовых задач с применением методов векторов и метода координат.	Обучающийся не владеет навыками решения типовых задач.	Обучающийся владеет не в полной мере навыками решения типовых задач и допускает ошибки.	Обучающийся владеет навыками решения типовых задач на хорошем уровне.	Обучающийся владеет навыками решения не только типовых задач, но и задач повышенной сложности.	Индивидуальные задания

	математических моделей процессов и явлений.						

2. Оценочные средства, необходимые для оценки результатов обучения по дисциплине (модулю)

Перечень вопросов устного опроса для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Знания»

1. Направленные отрезки. Векторы. Понятие вектора. Виды векторов.
2. Сложение и вычитание векторов. Определения и свойства. Примеры.
3. Умножение вектора на число. Определение и свойства. Примеры.
4. Коллинеарные и компланарные векторы.
5. Линейно зависимая система векторов. Свойства такой системы векторов. Примеры.
6. Линейно независимая система векторов. Свойства такой системы векторов. Примеры.
7. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам. Следствие.
8. Базис. Размерность. Понятие координат точек. Примеры. Свойства координат точек.
9. Ортонормированный базис. Вычисление длины вектора через ее координаты. Примеры.
10. Скалярное произведение векторов. Определение. Вычисление его в координатах. Примеры.
11. Скалярное произведение векторов. Определение. Примеры. Свойства скалярного произведения векторов.
12. Векторные подпространства. Примеры. Двумерное векторное подпространство. Условие коллинеарности двух векторов. Простейшие задачи, решаемые в координатах.
13. Применение векторов к решению задач. Алгоритм применения векторов. Примеры.
14. Аффинная и прямоугольная декартова система координат. Координаты точек в пространстве. Решение простейших задач в координатах.
15. Формула преобразования координат на плоскости.
16. Матрица перехода. Левый и правый базисы.
17. Полярные координаты. Простейшие задачи, решаемые в полярных координатах.
18. Метод координат на плоскости. Решение типовых задач.
19. Алгебраическая линия и ее порядок. Окружность.
20. Приложение метода координат к решению задач школьного курса геометрии.
21. Уравнения прямой. Примеры.
22. Общее уравнение прямой и особенности расположения кривой относите5льно системы координат. Примеры.
23. Аффинные задачи на прямую. Примеры.
24. Метрические задачи (угол между двумя прямыми, расстояние от точки до прямой) на прямую на плоскости. Примеры.
25. Основные задачи на прямую. Примеры.
26. Эллипс. Определение, вывод канонического уравнения. Свойства. Изображение.
27. Гипербола. Определение, вывод канонического уравнения. Свойства. Изображение.
28. Парабола. Определение, вывод канонического уравнения. Свойства. Изображение.
29. Уравнения эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах.
30. Взаимное расположение линии второго порядка и прямой на плоскости. Асимптотические направления.
31. Центр и касательная к линии второго порядка. Вывод формул. Примеры.
32. Главные направления. Главные диаметры.
33. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.
34. Инварианты линии второго порядка и их применение для классификации.

Перечень контрольных работ для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Умения»

Вариант I

1. Дан тетраэдр $ABCD$, точка M – центр тяжести грани ABC, N и K – середины ребер BD и DA соответственно. Найти координаты векторов $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{NK}$ в базисе $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали A_1B и B_1C его граней наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60°. Вычислить угол между этими диагоналями.

3. M и M_1 – точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$.

4. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов прямого трехгранного угла.

5. В четырехугольнике $ABCD$ суммы квадратов длин противоположных сторон равны. Методом векторов доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Вариант 2

1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, N – середина отрезка B_1C_1, M – точка пересечения прямых A_1B и AB_1. Найти координаты векторов $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CN}$ в базисе $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA_1}$.

2. Дан треугольник ABC такой, что в ортонормированном базисе $\overrightarrow{BA}(-2, 3)$, $\overrightarrow{BC}(0,1)$. Найти длину высоты BH и угол между векторами $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{BA}$.

3. Доказать, что если для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполнено условие $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}|$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

4. Найти угол между биссектрисами AA_1 и AA_2, двух граней правильного тетраэдра $ABCD$.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$, M и N – центры граней BCD и ACD соответственно. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$.

Вариант 3

1. В тетраэдре $ABCD$ точка M – центр тяжести грани BCD , K и L – середины ребер AD и BD соответственно. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{KL}$ в базисе $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}$.

2. Найти длину биссектрисы BD треугольника ABC, если известно, что $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 60°$.

3. Доказать, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Доказать, что в четырехугольнике с взаимно перпендикулярными диагоналями сумма площадей квадратов, построенных на одной паре противоположных сторон, равна сумме площадей квадратов, построенных на другой паре таких сторон.

5. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба.

Вариант 4

1. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой все ребра равны. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, где M – середина ребра B_1C_1.

2. Точка O – центр параллелограмма $ABCD$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}$ в базисе $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}$, где M – середина стороны BC.

3. Пусть m_a, m_b, m_c - медианы треугольника, сторонами которого являются отрезки a, b, c. Доказать, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

4. Найти длину высоты AH треугольника ABC, в котором $\angle BAC = 60°$, $AB = 3$, $AC = 2$.

5. Доказать, что если в тетраэдре имеется две пары взаимно перпендикулярных противоположных ребер, то и оставшиеся два ребра будут взаимно перпендикулярными.

Вариант 5

1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M – центр грани BCC_1B_1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ в базисе $\overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AB}$.

2. Дан угол ABC, причем известны координаты векторов $\overrightarrow{BA}(-3,0,4)$ и $\overrightarrow{BC}(5,-2, -14)$ в ортонормированном базисе. Найти координаты единичного вектора, сонаправленного с биссектрисой данного угла.

3. Пусть AH – высота, AM – медиана треугольника ABC, в котором $\angle BAC = 60°$, $AB = 3$, $CA = 4$. Найти координата векторов $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AM}$ в базисе $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$.

4. В трапеции $ABCD$ основание AD в пять раз больше основания BC. Найти длины диагоналей трапеции и угол между ними, если известно, что $AB = 6$, $AD = 10$, $\angle BAD = 60°$.

5. В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

Вариант 6

1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины ребер A_1D и BC соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC_1}$.

2. Векторы $\vec{a}\,(2,–3,0)$, $\vec{b}$ (1,1,0) заданы своими координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $|\vec{e}_1| = 3,\ |\vec{e}_2| = 2,\ |\vec{e}_3| = \pi$ угол между векторами $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ равен 60°, а углы между векторами $\vec{e}_1,\ \vec{e}_3$ и $\vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ равны 45°. Найти угол между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

3. Пусть CH – высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого утла к гипотенузе AB. Найти координаты вектора $\overrightarrow{CH}$ в базисе $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$, если известно, что $|CA| = b$, $|CB| = a$.

4. Найти величину двугранного угла при ребре правильного тетраэдра.

5. Доказать, что прямая, проходящая через середины двух противоположных ребер правильного тетраэдра, перпендикулярна каждому из них.

Вариант 7

I. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны a . Точка M принадлежит ребру B_1C_1, причем B_1M относится к MC_1, как 2:1, точка O – центр грани ABC. Найти длину отрезка OM.

2. Компланарны ли векторы $\vec{a}$ (1,2,4), $\vec{b}$ (3,2,1), $\vec{c}$ (–1,2,7)?

3. Пусть CH – высота, CD – биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle C$ – прямой, CA =3, CB = 4. Найти координаты векторов в базисе $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

4. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые коллинеарные векторы, α и β – данные $\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CD}$ вещественные числа. При каком условии существует решение $\vec{x}$ системы уравнений $\vec{a}\vec{x} = \alpha,\ \vec{b}\vec{x} = \beta$?

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Методом векторов доказать, что его диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD.

Вариант 8

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a . Найти расстояние между серединами ребер SA и CD.

2. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ (–2,3,α) и $\vec{b}$ (β,–6,2): а) коллинеарны; б) взаимно ортогональны; в) имеют равные длины? В случаях б) и в) предполагается, что базис – ортонормированный.

3. Дан квадрат $ABCD$; E – середина стороны AD, точка F – принадлежит прямой AC. Доказать, что прямые EF и FB взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FC}$ или $F = A$.

4. С помощью векторов доказать, что диагонали ромба перпендикулярны.

5. Доказать следующее утверждение: для того, чтобы каждая пара противоположных ребер AB и CD, AC и BD, BC и AD тетраэдра $ABCD$ была взаимно перпендикулярна, необходимо и достаточно, чтобы $AB^2 + CD^2 = =AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$.

Вариант 9

1. Зная длины всех шести ребер тетраэдра, найти длины отрезков, соединяющих попарно середины противоположных ребер.

2. Даны тройки векторов: а) $\vec{a}$ (–3,0,2), $\vec{b}$ (2,1–4), $\vec{c}$ (11,–2,–2),

б) $\vec{d}$ (1,0,7), $\vec{e}$ (–1,2,4), $\vec{f}$ (3,2,1). Найти среди них тройку компланарных векторов.

3. Дан треугольник ABC, причем известно, что в ортонормированном базисе $\overrightarrow{AB}$ (3,0), $\overrightarrow{AC}$ (0,1). Найти величину угла между высотой AH и медианой BM этого треугольника.

4. Даны ненулевой вектор $\vec{a}$ и вещественное число λ. Выяснить геометрический смысл решений $\vec{x}$ уравнения $\vec{a}\ \vec{x} = \lambda$.

5. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Вариант 10

1. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из двух ребер, выходящих из точки A, угол 60°. Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки A?

2. Методом векторов доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

3. Найти наименьшую размерность векторного пространства, содержащего векторы $\vec{a}$ (1,2,4), $\vec{b}$ (3,2,1), $\vec{c}$ (–1,2,7).

4. В трапеции $ABCD$ основание AB в два раза больше основания CD, O и E – точки пересечения диагоналей и продолжений боковых сторон соответственно. Найти OE, если AB = 8, AD = 6, $\angle DAB$ = 60°.

5. Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Пифагора.

Перечень индивидуальных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-1 на этапе «Владения»

Задание 1. Не приводя к каноническому виду найти:
1) центр линии;
2) асимптотические направления;
3) написать уравнение касательной к кривой, проходящей через выбранную точку;
4) диаметр, проходящий через начало координат;
5) диаметр, сопряженный вектору $\vec{i}$;
6) уравнения главных диаметров.

Задание 2. Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить ее. Найти полуоси или параметр и эксцентриситет.

Варианты заданий

1. $x^2+y^2+xy+x+y=0$	16. $3xy-4y^2+6x-13y-\frac{11}{2}=0$
2. $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$	17. $12x^2-24xy+12y^2-48x=0$
3. $3xy+6x+3y+\frac{15}{2}=0$	18. $12xy-16y^2+24x-52y-22=0$
4. $4xy+\frac{3}{2}y^2+8x+6y-18=0$	19. $20x^2+8xy+12\frac{1}{2}y^2-4x-7y+\frac{1}{2}=0$
5. $4xy+8x+4y+10=0$	20. $2xy+\frac{3}{2}y^2+8x+6y-18=0$
6. $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$	21. $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$
7. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$	22. $4x^2+4xy+y^2+8x+6y+3=0$
8. $2x^2+xy+2y^2+15\sqrt{2}\,x+50=0$	23. $x^2-2xy+9y^2-8x-6y+12=0$
9. $10x^2+6xy+2y^2-2x+4y-3=0$	24. $9x^2+6y^2+4xy+2x-4y-4=0$
10. $3x^2+4\sqrt{2}\,xy+5y^2+6x-1=0$	25. 2 $x^2-3xy+2y^2+7x-3y-3=0$
11. $4x^2+2xy+4y^2+30\sqrt{2}\,x+100=0$	26. $x^2-2xy+y^2-4x=0$
12. $5x^2+4y^2+6xy-3x-6y+1=0$	27. $9x^2+4y^2-12xy+39=0$
13. $xy+2x+y+\frac{5}{2}=0$	28. $\sqrt{3}\,x^2-\sqrt{3}\,y^2+2xy-2x-2\sqrt{3}\,y=0$
14. $9x^2+12xy+4y^2+8x+14y+3=0$	29. $x^2+6xy+9y^2-12x+24y+15=0$
15. $3x^2+4\sqrt{2}xy+5y^2+6x-1=0$	30. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

Семестр 3.

Перечень вопросов устного опроса для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Знания»

1. Координаты точек в пространстве. Решение простейших задач в координатах.
2. Формулы преобразования координат в пространстве. Ориентация.
3. Векторное произведение векторов. Определение. Геометрический смысл модуля векторного произведения векторов.
4. Векторное произведение в координатах. Свойства векторного произведения векторов.
5. Смешанное произведение векторов. Определение. Геометрический смысл модуля векторного произведения векторов.
6. Смешанное произведение в координатах. Свойства.
7. Уравнения плоскости. Примеры.
8. Общее уравнение плоскости. Условие параллельности вектора плоскости. Примеры. Особенности расположения плоскости относительно системы координат.

9. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Примеры.
10. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями. Примеры
11. Уравнения прямой в пространстве. Примеры.
12. Основные задачи на прямую и плоскость. Примеры решения их в конкретных случаях.
13. Метод координат в пространстве. Алгоритм применения. Примеры.
14. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Примеры.
15. Поверхности вращения. Вывод уравнения. Примеры.
16. Цилиндрические поверхности. Вывод уравнения. Примеры.
17. Конические поверхности второго порядка. Конические сечения.
18. Эллипсоид.
19. Однополостный гиперболоид. Определение. Сечения. Свойства. Изображение.
20. Эллиптический параболоид. Определение. Сечения. Свойства. Изображение.
21. Гиперболический параболоид. Определение. Сечения. Свойства. Изображение.
22. Двуполостный гиперболоид. Определение. Асимптотический конус. Сечения. Свойства. Изображение.
23. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.

Перечень контрольных работ для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Умения»

Вариант I

1. Дан тетраэдр *ABCD*, точка *M* – центр тяжести грани *ABC*, *N* и *K* – середины ребер *BD* и *DA* соответственно. Найти координаты векторов $\overrightarrow{DM}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{NK}$ в базисе $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$.
2. Доказать, что треугольник *ABC* – равнобедренный, и составить уравнение его оси симметрии: 1) *A*(2,1), *B*(4,3), *C*(2,3); 2) *A*(1,–3), *B*(–1,1), *C*(0,–1).
3. Даны уравнения $x-y+1=0$ и $x-2y=0$ смежных сторон параллелограмма и точка $M(3,1)$ пересечения его диагоналей. Найти уравнения двух других сторон.
4. Методом координат докажите, что четырехугольник тогда и только тогда является трапецией, когда его точка пересечения диагоналей, точка пересечения прямых, содержащих противоположные стороны и середины двух других противоположных сторон лежат на одной прямой.
5. Докажите, что в треугольнике точки пересечения высот, медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

Вариант 2

1. Точки *A*(1,1), *B*(–1,2), *C*(2,–1) – три вершины равнобочной трапеции. Вычислить координаты четвертой вершины.
2. На луче $x=2+3t$, $y=1-2t$, $t\le 0$ найти точку *B*, расстояние от которой до начала луча равно 3.
3. Можно ли подобрать коэффициенты α и β так, чтобы прямые $3x-2y+1=0$ и $\alpha x+\beta y-3=0$: а) совпали, б) были параллельны, в) пересекались?
4. Дан треугольник ABC, M - середина его медианы BD, K - точка пересечения прямой AM со стороной BC. Найдите (BC, K).
5. Методом координат решите следующую задачу. В прямоугольном треугольнике длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна h, радиус вписанной окружности r. Найдите длину гипотенузы.

Вариант 3

1. Составить уравнение множества центров тяжести треугольников, имеющих две вершины $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, если третья вершина лежит на окружности радиуса a, центр которой – начало координат.
2. Дана прямая *d* и точка *A*. Вычислить координаты основания перпендикуляра, проведенного из точки *A* на прямую *d*, если:

   1) *d*: 3x+4y–1=0, *A*(2,–1); 2) *d*: x+3y+2=0, *A*(–2,3).
3. Исследовать взаимное расположение прямых: а) $x+3y-3=0$ и $2x-2y-6=0$; б) $x=1+t,\ y=2-t$ и $\dfrac{x}{2}=-\dfrac{y-3}{2}$.
4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит диагональ AC в отношении $(AC,M)=1/2$. Найдите (AB,K) и (BC,Z), где K, Z - соответственно точки пересечения прямой DM с прямыми AB и BC.
5. В правильном треугольнике через его центр проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от ее положения.

Вариант 4

1. Фигура F задана уравнением $f(x,y)=0$. Какую фигуру задает уравнение: 1) $f(x,-y)=0$; 2) $f(y,x)=0$; 3) $f(-y,x)=0$.

2. Даны уравнения прямых, содержащих высоты треугольника, и координаты одной из вершин треугольника. Вычислить координаты двух других вершин этого треугольника:

1) $3x+4y-7=0$, $2x-y-1=0$, A(5,–3); 2) $3x+4y-2=0$, $4x-y+2=0$, A(0,–1).

3. Определите координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $x+3y+12=0,\ x+3y-8=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x+y+4=0$.

4. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 отличны от вершин и принадлежат соответственно прямым BC, AC и AB. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что

$$(AA_1,\ O)=(AC,\ B_1)+(AB,\ C_1).$$

5. Дан равнобедренный треугольник ABC, точка M принадлежит продолжению уго основания AC. Докажите, что модуль разности расстояний от точки M до прямых AB и BC равен высоте треугольника, опущенной на боковую сторону. Задачу решите методом координат.

Вариант 5

1. На прямой $2x-y-10=0$ найти точку, сумма расстояний от которой до точек $A(-5,0)$ и $B(-3,4)$ была бы наименьшей.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) даны координаты вершин $A(4,3)$, $B(-1,2)$ и уравнение прямой BD: $3x-2y+7=0$, перпендикулярной AC. Написать уравнения прямых AB и BC.

3. Даны вершины треугольника ABC: $A(-4,-5), B(4,1), C\left(-\dfrac{1}{2},7\right)$. Найти уравнение биссетрисы внутреннего угла при вершине B.

4. Дан треугольник ABC и D - произвольная точка прямой, принадлежащая его медиане AA_1. Пусть B_1 и C_1 - соответственно точки пересечения прямых BD и CD с прямыми AC и AB. Докажите, что прямая C_1B_1 параллельна стороне BC.

5. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до боковых сторон равна его высоте.

Вариант 6

1. Даны точки $A(5,2)$ и $B(2,1)$. На прямой $x+y-5=0$ найти точку M, такую, чтобы $\angle AMB=45^0$.

2. Через точку пересечения медиан треугольника проведена прямая d. Найти соотношение между расстояниями от вершин треугольника до прямой d.

3. Даны вершины треугольника ABC: $A(-4,-5), B(4,1), C\left(-\dfrac{1}{2},7\right)$. Найти уравнение биссетрисы внешнего угла при вершине B.

4. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. докажите, что $(AC,M)+(BC,N)=1$.

5. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд есть величина постоянная.

Вариант 7

1. Две прямые $x+y-2=0$, $x+y+3=0$ повернуты вокруг начала координат на 90^0. Найти координаты точек пересечения данных прямых и их образов при повороте. Доказать, что полученные точки являются вершинами квадрата.

2. Даны вершины треугольника ABC: $A(-4,-5), B(4,1), C\left(-\dfrac{1}{2},7\right)$. Найти уравнение медианы, проведенной к стороне AB.

3. Найти уравнения касательных к окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=4$, параллельных прямой $x=t,\ y=t$.

4. Даны параллелограммы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$, имеющие общую вершину O. Точки A_1 и C_1 соответственно принадлежат отрезкам OA и OC. Докажите, что прямые A_1C, C_1A, BB_1 пересекаются в одной точке.

5. Окружность касается двух прямых, содержащих смежные стороны квадрата, и делит каждую из двух других сторон на отрезки 2 и 23 см. Найдите радиус окружности.

Вариант 8

1. Отрезок постоянной длины движется так, что один его конец скользит по окружности $x^2+y^2=r^2$, а другой – по оси Ox (шатунно-кривошипный механизм). Составить уравнение кривой, которую описывает точка отрезка, разделяющая его на части a и b.

2. Найти координаты точки, имеющей одни и те же координаты в системах (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) и (O', $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$), где $O'(2,-3)$, $\vec{e}_1{}'(1,3)$, $\vec{e}_2{}'(-2,1)$.

3. Найти уравнения касательных к окружности $x^2+y^2=5$, проходящих через точку $M(-1,3)$.

4. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC. Точки M и N делят боковые стороны в равных отношениях. Докажите, что отрезок MN делится диагоналями на три равные части.

5. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки.

Вариант 9

1. Прямая d проходит через вершину A и середину медианы BM треугольника ABC, N – точка пересечения прямой d со стороной BC. Доказать, что отношение $(BC,N)=\frac{1}{2}$.

2. Найти уравнение тупого угла между прямыми $x+2y-7=0$ и $4x+2y+3=0$.

3. Через точку $P(1,-2)$ проведены прямые, наклоненные к прямой $x=5$ под углом, тангенс которого равен 2/3. Найти уравнения этих прямых.

4. Точка S лежит на продолжении диагонали AC четырехугольника $ABCD$, M и N - середины сторон BC и CD, а E и F - соответственно точки пересечения прямых SM и SN со сторонами AB и AD. Докажите, что прямая EF параллельна диагонали BD.

5. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге AB взята произвольная точка M. Докажите, что

$$|CM|=|AM|+|BM|.$$

Вариант 10

1. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AMNP$, где M – точка стороны AB, N – точка стороны AD. Доказать, что прямые MD, BP, NC пересекаются в одной точке.

2. Какие координаты будет иметь точка А в аффинной системе координат (O', $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$), если в репере (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$): $A(3,-1)$, $O'(2,3)$, $\vec{e}_1{}'(2,1)$, $\vec{e}_2{}'(-2,1)$.

3. Найти уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x-y+5=0$ и вершину прямого угла $C(4,-1)$.

4. Методом координат докажите теорему Чевы.

5. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если его точка пересечения высот лежит на вписанной окружности.

Перечень индивидуальных заданий для оценки сформированности компетенции ПК-1 на этапе «Владения»

Вариант 1.

1. Из одной точки отложены направленные отрезки - представители некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих отрезков, перпендикулярна вектору $\vec{p}=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]$.

2. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(2,-1,-1)$, $B(5,-1,2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6,0,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

3. Написать уравнения прямой, пересекающей каждую из трёх прямых, заданных в аффинной системе координат уравнениями

$$a:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases},\quad b:\begin{cases}x=1\\z=0\end{cases},\quad c:\begin{cases}y=1\\z=-1\end{cases}$$

4. Через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$, провести плоскость, образующую угол π/4 с плоскостью, заданной уравнением $x-4y-8z+12=0$.

5. Найти расстояние между прямыми, заданными уравнениями

$$\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\x-y-z-4=0\end{cases}\quad \text{и}\quad \frac{x}{3}=\frac{y+19}{-1}=\frac{z-9}{4},$$

и написать уравнения прямой, содержащей общий перпендикуляр этих прямых.

6. Доказать, что отрезки, соединяющие противоположные ребра тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Вариант 2.

1. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$, $C(2,3,5)$, $D(6,0,-3)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH;
г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

2. Найти расстояние от точки $C(3,2,-2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1,2,-3)$ и $B(5,2,0)$.

3. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости, заданной уравнением $3x-6y-2z+14=0$, и удалённой от неё на расстояние, равное 3.

4. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4,0,-1)$, которая пересекает прямые, заданные в аффинной системе координат уравнениями

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=5t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases}.$$

5. Написать уравнение плоскости, симметричной координатной плоскости $0xz$ относительно плоскости, заданной уравнением $3x-4y+5z+5=0$.

6. Пусть ребра AB, AC, AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, лежит на прямой, соединяющей вершину A с центром тяжести треугольника BCD.

Вариант 3.

1. Найти объём шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью, заданной уравнением

$$2x+3y+6z-18=0.$$

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x-2y=4z-3=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

3. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(-2,-1,-1)$, $B(5,-1,2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6,1,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH;
г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

4. Написать уравнение плоскости γ, которая параллельна плоскостям α и β, заданным соответственно уравнениями $x-2y+z-1=0$ и $x-2y+z-3=0$, если известно отношение расстояний

$$\rho(\gamma,\alpha):\rho(\gamma,\beta)=1:3.$$

5. Найти координаты точки, симметричной точке $A(0,0,2)$ относительно прямой, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}.$$

6. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам тетраэдра и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

Вариант 4.

1. Найти площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n}, \overrightarrow{AC} = \vec{m} - \vec{n},$ где $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 3$, $\angle CAB = 60°$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям, заданным уравнениями $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0.$

3. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(2, -1,1)$, $B(5,-1,2)$, $C(-3,0,-3)$, $D(6,0,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

4. Написать уравнения прямой, содержащей перпендикуляр, проведённой из точки $A(2, 3, 1)$ к прямой, заданной уравнениями $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}.$

5. Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$, $D(4,1,2)$. Вычислить его объём и составить уравнение прямой, содержащей общий перпендикуляр прямых AC и BD.

6. В неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон и середины диагоналей пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вариант 5.

1. При каком значении параметра α векторы $\vec{m} = 3\alpha\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{n} = 3\vec{p} - \vec{q}$:

а) коллинеарны, б) перпендикулярны, если известно, что $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, (\vec{p}, \vec{q}) = 60°$?

2. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(5,1,2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6,0,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Найти расстояние между прямыми, заданными уравнениями

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+9}{1} = \frac{z-9}{4}.$$

5. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4,0,-1)$, которая пересекает прямые, заданные уравнениями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 5t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

6. В неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон и середины диагоналей пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вариант 6.

1. Вычислить площадь треугольника ABC, если известно, что $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 4, |\vec{n}| = 6, (\overrightarrow{m,n}) = \pi/3$.

2. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках

$A(-2,-1,1)$, $B(5,-1,-2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6,0,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

3. Написать уравнение множества всех точек пространства, равноудалённых от двух плоскостей, заданных уравнениями $3x-y+z-5=0$ и $3x-y+z+15=0$.

4. Найти величину угла между прямой, заданной уравнениями $\begin{cases}2x+y-z-3=0\\ x+y-z-1=0\end{cases}$ и плоскостью, заданной уравнением $x-y-z-1=0$.

5. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,-1,0)$, которая пересекает под прямым углом прямую, заданную уравнениями $x=t,\ y=-1-3t,\ z=-1-2t$.

6. Доказать, что две плоскости, проведенные через вершины A_1BD и CB_1D_1, делят диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на три равные части.

Вариант 7.

1. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(2,-1,2)$, $B(5,1,2)$, $C(3,0,-3)$, $D(6.0,-1)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 3. Найти расстояние от вершины A до плоскости BMN, где M и N – середины рёбер DC и D_1C_1 соответственно.

3. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,0,1)$ и перпендикулярной к плоскости, заданной уравнением $3x-6y+3z-10=0$. Найти расстояние между этой прямой и осью абсцисс.

4. Выяснить взаимное расположение прямых, заданных в аффинной системе координат уравнениями

$$x=-t,\ y=8+4t,\ z=3+3t \quad \text{и} \quad \begin{cases}x+y-z=0\\ 2x-y+2z=0.\end{cases}$$

5. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными уравнениями

$$x=2t,\ y=1-t,\ z=t \quad \text{и} \quad x=1-t,\ y=1+t,\ z=3-t.$$

6. Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через центры тяжести треугольников A_1BD и B_1D_1C.

Вариант 8.

1. При каком значении α векторы $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{S}=\alpha\vec{b}-4\vec{c}$, $\vec{t}=\vec{b}+2\vec{c}$ компланарны, если известно, что $\left[\vec{a}\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\neq 0$?

2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ векторы $\overrightarrow{AB}(1,2,1)$, $\overrightarrow{AC}(3,0,2)$ определяют основание, а вектор $AA_1(-1, 0, 0)$ – боковое ребро. Найти объём призмы и площадь грани ABB_1A_1.

3. Найти расстояние от точки $C(3,2,-2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$ и $B(5, 2, 0)$.

4. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$, $C(2,3,5)$, $D(6,0,-3)$. Найти: а) объем параллелепипеда;
б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

5. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M(2,1,-1)$ перпендикулярно прямым, заданным уравнениями:

$$\begin{cases}x-y-3z=0\\ x-2y+z=0\end{cases} \quad \text{и} \quad x=1+4t,\ y=-2+7t,\ z=1-t.$$

6. В неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины двух противоположных сторон и середины диагоналей пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вариант 9.

1. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(0,0,0)$, $B(3,4,-1)$, $C(2,3,5)$, $D(6,0,-3)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

2. Написать уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1,2,-1)$ и параллельна прямой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}.$$

3. Выяснить взаимное расположение прямых, заданных в аффинной системе координат уравнениями:

$$\begin{cases} x=-1-2t \\ y=-7-t \\ z=-3-4t \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-6}{-3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями $x+y-z+1=0$ и $2x+3y-z+2=0,$ и перпендикулярной к плоскости, заданной уравнением $x-y+2z-1=0.$

5. Написать уравнения прямой, содержащей общий перпендикуляр двух прямых, заданных уравнениями

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

6. Докажите, что в неплоском четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Вариант 10.

1. На оси абсцисс найти точку, равноудалённую от точки $A(1,0,0)$ и плоскости, заданной уравнением $x+y-z+1=0.$

2. Выяснить взаимное расположение и вычислить угол между прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-2}$ и плоскостью $x+y+z-4=0.$

3. Через точку $A(2,-5,3)$ проведена прямая a, параллельная прямой, заданной уравнениями $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$. Написать уравнения прямой, содержащей общий перпендикуляр прямой a и оси аппликат.

4. Найти точку, симметричную точке $A(4,3,10)$ относительно прямой, заданной уравнениями $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=3+5t.$

5. Дан тетраэдр, вершины которого находятся в точках $A(0,0,0)$, $B(3,4,1)$, $C(2,3,-5)$, $D(6,0,-3)$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину и уравнение высоты AH; г) угол между ребрами AB и CD; д) уравнения граней ABC и ABD и угол между этими гранями.

6. Пусть ребра AB, AC, AD тетраэдра $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, лежит на прямой, соединяющей вершину A с центром тяжести треугольника BCD.

Семестр 4

Перечень вопросов устного опроса для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Знания»

1. Векторное *n*-мерное пространство. Свойства.
2. Евклидово векторное многомерное пространство.
3. Аффинное точечное многомерное пространство. Свойства.
4. *k*-мерные плоскости. Их взаимное расположение. Примеры.
5. Гиперплоскости и связанные с ними задачи.
6. Евклидово многомерное точечное пространство. Простейшие задачи.
7. Квадратичные формы и ее инварианты. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Метод Лагранжа.
8. Положительно-определенные квадратичные формы.
9. Квадрики в аффинном пространстве.
10. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду. Закон инерции вещественных квадратичных форм.
11. Квадрики в аффинном пространстве. Центр квадрики.
12. Цилиндрические и конические квадрики.
13. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду. Понятие о классификации квадрик.
14. Квадрики в евклидовом пространстве. Линейный оператор, его собственный вектор, собственные значения оператора.

Перечень контрольных работ для оценки сформированности компетенции ПК 1 на этапе «Умения»

Вариант 1

1. Точки *M* и *N* принадлежат соответственно сторонам *DC* и *CB* параллелограмма *ABCD*. Через середину отрезков *DM* и *AB* проведена прямая. Через середину отрезков *AD* и *BN* – вторая прямая, пересекающая первую в точке *P*. Доказать, что прямая *AP* проходит через середину отрезка *MN*.

2. Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат в каждом из следующих случаев:
1) $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\vec{j}, O'(-3,2)$ и системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ и $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ ориентированы одинаково; 2) $\angle(\vec{i}, \vec{i}')=30^0$ и системы координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ и $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ ориентированы противоположно.

3. Доказать, что треугольник, заданный уравнениями своих сторон, является равнобедренным:
$$x+5y+8=0,\ 8x+y-14=0,\ 7x-4y+17=0 .$$

4. Методом координат докажите теорему Менелая.

5. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки.

Вариант 2

1. Дан треугольник *ABC*. Прямая *d* пересекает прямые *BC*, *CA*, *AB* соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. На каждой прямой построены точки A_2, B_2, C_2 симметричные точкам A_1, B_1, C_1 относительно середины содержащих их сторон. Доказать, что точки A_2, B_2 и C_2 принадлежат на одной прямой.

2. В системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ даны линии уравнениями:
1) $x-2y+1=0$; 2) $x+y=0$; 3) $y-3=0$. Найти уравнения тех же линий в системе $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, если $O'(2,-3), \vec{e}_1{}'(1,3), \vec{e}_2{}'(-2,1)$.

3. Луч света направлен по прямой $x+y+3=0$. Дойдя до прямой $3x-y+5=0$, луч отразился. Найти уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

4. Дан треугольник ABC. Прямая *l* пересекает прямые AB, BC и AC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Точки C_2, A_2 и B_2 - симметричные C_1, A_1 и B_1 относительно середин сторон, их содержащих. Докажите, что точки C_2, A_2 и B_2 лежат на одной прямой.

5. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенными из одной вершины основания равнобедренного треугольника, равен ½. Найдите тангенс его угла при основании.

Вариант 3

1. Найти множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки A вдвое больше расстояния до данной прямой a, проходящей через точку A.

2. Прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ повернули вокруг начала координат на угол $+30^0$. Найти уравнения: 1) новых координатных осей в старой системе; 2) старых координатных осей в новой системе.

3. Даны уравнения $3x - y + 5 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$ соответственно основания и боковой стороны равнобедренного треугольника. Найти уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку $M(1,-3)$.

4. Точка S лежит на продолжении диагонали AC четырехугольника $ABCD$, M и N - середины сторон BC и CD, а E и F - соответственно точки пересечения прямых SM и SN со сторонами AB и AD. Докажите, что прямая EF параллельна диагонали BD.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а высота, опущенная на него, 4 см. Найдите длину отрезка, заключенного между основаниями высот, проведенными к боковым сторонам.

Вариант 4

1. Через точку M к сторонам треугольника проведены перпендикуляры. Найти множество точек M, для каждой из которых основания перпендикуляров принадлежат одной прямой.

2. Прямоугольную декартову систему координат $(O, \vec{i}, \vec{j})$ повернули вокруг начала координат на угол $+45^0$. Найти уравнения: 1) новых координатных осей в старой системе; 2) старых координатных осей в новой системе.

3. Точка $A(8,8)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x + 2y - 9 = 0$. Найти уравнения сторон и второй диагонали квадрата.

4. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 отличны от вершин и принадлежат соответственно прямым BC, AC и AB. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что

$$(AA_1, O) = (AC, B_1) + (AB, C_1).$$

5. Через вершину B равностороннего треугольника проведена прямая, делящая стону AC в отношении 2. Найдите углы между этой прямой и сторонами AB и BC треугольника.

Вариант 5

1. На сторонах прямого угла ACB даны две точки A и B так, что $CA=CB$. Найти множество точек M, расположенных внутри угла, для которых луч MC есть биссектриса угла AMB

2. Определить общую прямую следующих двух пучков:

$$(2+3\lambda)x-(4-7\lambda)y+\lambda=0,\ (3-\mu)x+(4-7\mu)y+5=0.$$

3. Даны две вершины треугольника $A(1,2)$, $B(-3,1)$ и уравнение $x + y = 0$ биссектрисы. Найти уравнения сторон треугольника.

4. Дан треугольник ABC, M - середина его медианы BD, K - точка пересечения прямой AM со стороной BC. В каком отношении точка K делит сторону BC.

5. В равнобедренном треугольнике ABC $(|AC| = |CB|)$. Медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE. Определите тангенс угла при основании треугольника.

Вариант 6

1. Вычислить площадь параллелограмма $ABCD$ по координатам трех его вершин в репере $(O, \vec{i}, \vec{j})$: 1) $A(3,1)$, $B(-1,0)$, $C(2,-1)$; 2) $A(3,-1)$, $B(2,1)$, $C(-3,0)$.

2. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x - 2 = 0,\ y + 3 = 0,\ 4x + 3y - 11 = 0\ .$$

Найти уравнения: а) описанной, б) вписанной окружностей.

1. Треугольник задан уравнениями своих сторон:

$$3x + 8y - 9 = 0,\ 3x - y - 9 = 0,\ 3x - 10y + 45 = 0\ .$$

Найти аналитические условия, определяющие внутреннюю область треугольника.

4. Дан треугольник ABC, D - произвольная точка прямой, содержащей его медиану AA_1. Пусть B_1 и C_1 - соответственно точки пересечения прямых BD и CD с прямыми AC и AB. Докажите, что прямая C_1B_1 параллельна стороне BC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены медиана CM и биссектриса CK, $|CM| = m$, $|KM| = n$. Найдите длины катетов. Задачу решите методом координат.

Вариант 7

1. По координатам концов двух отрезков AB и CD выяснить, имеют ли они общую точку: 1) $A(3,1)$, $B(-2,0)$, $C(0,1)$, $D(-3,2)$; 2) $A(1,0)$, $B(2,4)$, $C(3,0)$, $D(0,6)$.

2. Даны пересекающиеся прямые $x-3y+5=0,\ 2x+y-3=0$. Найти систему неравенств, определяющих внутреннюю областьтого угла между этими прямыми, которой принадлежит точка $M(-4{,}15)$.

3. Даны уравнения двух сторон треугольника и координаты точки пересечения высот: $x-2y+1=0,\ 3x+y-4=0,\ H(-2,-1)$. Найдите координаты вершин.

4. Докажите, что четырехугольник тогда и только тогда является трапецией, когда его точка пересечения диагоналей, точка пересечения прямых, содержащих противоположные стороны, и середины двух других противоположных сторон лежат на одной прямой.

5. Длины диагоналей ромба равны $2a$ и $2b$. Найдите длину его высоты.

Вариант 8

1. Написать аналитические условия, определяющие треугольник *ABC*, если: 1) *A*(3,1), *B*(–2,0), *C*(0,1); 2) *A*(–3,1), *B*(2,0), *C*(0,1).

2. Найти координаты центра и радиус окружности, вписанного в треугольник , заданный уравнениями сторон:

$$4x+3y-65=0,\ 7x-24y+55=0,\ 3x+4y-5=0.$$

3. Даны уравнения двух сторон ромба: $x+2y-1=0,\ x+2y+3=0$ и его диагонали $x+y=0$. Найдите уравнения двух других сторон.

4. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 отличны от вершин и принадлежат соответственно прямым BC, AC и AB. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что

$$(AA_1,\ O)=(AC,\ B_1)+(AB,\ C_1).$$

5. В равнобедренном треугольнике ABC $(|AC|=|CB|)$. Медиана AD перпендикулярна биссектрисе CE. Определите тангенс угла при основании треугольника.

Вариант 9

1. Написать аналитические условия, определяющие параллелограмм *ABCD*, если: 1) *A*(0,1), *B*(–1,2), *C*(1,3); 2) *A*(1,1), *B*(–2,0), *C*(3,–1).

2. Даны уравнение окружности и прямой:

$$(x-1)^2+(y+2)^2=5,\ x-2y+1=0.$$

Найдите уравнения касательных к окружности, параллельных данной прямой.

3. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(-2{,}5)$ относительно прямой $3x+2y-5=0$.

4. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые AB, BC и AC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Точки C_2, A_2 и B_2 - симметричные C_1, A_1 и B_1 относительно середин сторон, их содержащих. Докажите, что точки C_2, A_2 и B_2 лежат на одной прямой.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что отношение расстояний от любой точки прямой, содержащей диагональ AC, до прямых, содержащих BC и CD, не зависит от положения точки. Определите, чему оно равно.

Вариант 10

1. Вычислить координаты орта нормали прямой: 1) $x+2y-3=0$; 2) $x=2t-1$, $y=5t+4$; 3) $\frac{x-3}{1}=\frac{x+4}{2}$.

2. Даны уравнение окружности и прямой:

$$x^2+y^2+2x-2y-98=0,\ 3x+4y-5=0.$$

Найдите уравнения касательных к окружности, параллельных данной прямой.

3. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(-2,-5)$ относительно прямой $3x+4y-5=0$.

4. Даны параллелограммы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$, имеющие общую вершину O. Точки A_1 и C_1 соответственно принадлежат отрезкам OA и OC. Докажите, что прямые $A_1C,\ C_1A,\ BB_1$ пересекаются в одной точке.

5. В прямоугольном треугольнике длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна h, радиус вписанной окружности r. Найдите длину гипотенузы. Задачу решите методом координат.

Перечень заданий индивидуальных работ для оценки сформированности компетенции ПК-1 на этапе «Владения»

Вариант 1

1. Выяснить является ли отображение $g: V_4\times V_4\to R$, заданное формулой $g(\vec{x},\vec{y})=x^1y^1-x^2y^2$ билинейной?

2. В четырехмерном евклидовом векторном пространстве даны векторы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{a}(1,4,3,5)$, $\vec{b}(4,-2,-4,0)$, $\vec{c}(-2,-4,-3,0)$. Найти: а) $\vec{a}\vec{b}$, б) $|\vec{b}|$, $(\vec{a}-\vec{b})\vec{c}$.

3. Вычислить координаты ортогональной проекции точки $M(2,-1,3,1)$ на плоскость:

$$\Pi_2: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0. \end{cases}$$

4.Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2. \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

б) в E_5, заданных точками: $M_1(1,-2,2,-5,0)$, $M_2(3,1,4,-2,3)$, $M_3(-2,1,0,-4,0)$, $M_4(0,0,1,-1,2)$ и $N_1(2,1,-3,4,2)$, $N_2(7,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 - 4x_4 = 0.$$

Вариант 2

1. В четырехмерном евклидовом векторном пространстве даны векторы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{a}(1,4,3,5)$, $\vec{b}(4,-2,-4,0)$, $\vec{c}(-2,-4,-3,0)$. Найти их попарные скалярные произведения и по их значениям узнать, будет ли угол между этими векторами острый, тупой или прямой.

2. Вычислить расстояние от точки $A(2,3,-1,1)$ до плоскости

$$\Pi_2: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

3. Написать уравнение гиперплоскости в A_4, проходящей через точку $M(2,-1,1,0)$, параллельной прямой

$$x^1 = 1 + 2t, x^2 = 3t, x^3 = 1 - t, x^4 = 2 - t$$

и параллельной двумерной плоскости

$$\Pi_2: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 4. \end{cases}$

б) в E_5, заданных точками: $M_1(1,-2,3,-2,0)$, $M_2(0,1,4,-2,3)$, $M_3(-2,1,0,-4,1)$, $M_4(2,-4,2,-4,2)$ и $N_1(1,-1,7,-4,3)$, $N_2(5,-6,9,-4,4)$, $N_3(0,3,1,-1,2)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_2 + 1 = 0.$$

Вариант 3

1. Выяснить является ли отображение $g: V_4 \times V_4 \to R$, заданное формулой $g(\vec{x},\vec{y}) = \frac{x^1}{y^1} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4}$ билинейной?

2. Найти расстояние от точки $A\ (1,1,-2,1)$ до прямой

$$l: \ x_1 = \lambda, \quad x_2 = -\lambda + 1, \quad x_3 = \lambda + 2, \quad x_4 = 2\lambda - 1.$$

3. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases} \quad \text{и} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1.$$

б) в E_5, заданных точками:
$M_1(0,0,0,–1,2)$, $M_2(6,3,7,–4,–5)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(5,2,2,0,0)$
и $N_1(2,–1,–3,4,2)$, $N_2(3,0,2,0,–3)$, $N_3(1,2,3,–4,–3)$.

4. Написать уравнение трехмерной плоскости в E_4, проходящей через точку $M(2,-1,1,0)$ и ортогональную прямой

$$x^1 = 1 + 2t, x^2 = 3t, x^3 = 1 - t, x^4 = 2 - t.$$

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3 = 0.$$

Вариант 4

1. В четырехмерном евклидовом векторном пространстве даны векторы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{a}(1,4,3,5)$, $\vec{b}(4,-2,-4,0)$, $\vec{c}(-2,-4,-3,0)$. Найти: а) $\vec{a}\vec{b}$, б) $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

2. Найти площадь треугольника ABC по координатам вершин:

$A(0,0,1,2)$, $B(1,–1,2,–2)$, $C(1,1,–3,0)$.

3. Найти ортогональную проекцию прямой

$$l\colon\ x_1 = 2\lambda,\quad x_2 = -\lambda + 1,\quad x_3 = \lambda + 2,\quad x_4 = \lambda - 1$$

на плоскость $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:
а) в E_4:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

б) в E_5, заданных точками:
$M_1(1,1,1,–1,2)$, $M_2(0,1,2,–2,6)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(1,–2,3,4,1)$
и $N_1(2,1,–3,0,2)$, $N_2(0,7,–5,–12,12)$, $N_3(–1,4,–6,–8,1)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 6x_3 + 8x_4 = 0.$$

Является ли квадрика центральной?

Вариант 5

1. Выяснить является ли отображение $g: V_4 \times V_4 \to R$, заданное формулой $g(\vec{x},\vec{y}) = (x^1)^2 + (y^1)^2 + 2x^3y^3$ билинейной?

2. Найти расстояние от точки A (2,0,–2,1) до прямой

$$l\colon\ x_1 = 2\lambda,\quad x_2 = -\lambda + 1,\quad x_3 = \lambda + 2,\quad x_4 = \lambda - 1.$$

3. Найти ортогональную проекцию прямой

$$l\colon\ x_1 = 2\lambda,\quad x_2 = -\lambda + 1,\quad x_3 = \lambda + 2,\quad x_4 = \lambda - 1$$

на плоскость $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:
а) в E_4:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

б) в E_5, заданных точками:
$M_1(1,–2,2,–5,0)$, $M_2(3,1,4,–2,3)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(0,4,2,–1,3)$
и $N_1(1,1,–3,4,2)$, $N_2(4,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 0.$$

Вариант 6

1. В четырехмерном евклидовом векторном пространстве даны векторы $\vec{a}(1,0,1,0)$ и $\vec{b}(0,2,1,2)$ своими координатами в ортонормированном базисе. Найти вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Найти точку, симметричную точке $M(2,–1,3,1)$ относительно гиперплоскости:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1.$$

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,–1,3,1)$, ортогональную плоскости $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases} \quad \text{и} \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1,$$

б) в E_5, заданных точками:

$M_1(1,–2,2,–5,0)$, $M_2(3,1,4,–2,3)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(0,0,1,–1,2)$
и $N_1(2,1,–3,4,2)$, $N_2(7,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 - 4x_4 = 0.$$

Если квадрика имеет центр, найдите его.

Вариант 7

1. Выяснить, является ли отображение $g: V_4 \times V_4 \to R$, заданное формулой $g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 - 3x^2y^2 + 4x^3y^3 - x^4y^4$ билинейной?

2. Подпространство пятимерного векторного пространства задано системой уравнений

$$\begin{cases} p^1 + 6p^2 + 2p^3 + p^4 + p^5 = 0, \\ p^1 + 3p^2 - p^3 + 4p^4 + p^5 = 0. \end{cases}$$

Укажите какой-либо его базис.

3. Найти точку, симметричную точке $M(–2,–1,3,1)$ относительно гиперплоскости:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1.$$

Принадлежит ли вектор $\vec{a}(-3,-1,1,2)$ направляющему подпространству гиперплоскости?

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases} \quad \text{и} \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1,$$

б) в E_5, заданных точками:

$M_1(1,–2,2,5,0)$, $M_2(3,1,4,–2,3)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(0,0,1,–1,2)$
и $N_1(2,1,–3,4,2)$, $N_2(7,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_4 = 0.$$

Является квадрика центральной? Если да, найдите его центр.

Вариант 8

1. Выяснить, является ли форма

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 2x^1y^1 + 4x^2y^2 - 3x^3y^3$$

симметрической, положительно определенной?

2. В векторном пространстве V_5 найти пересечение двух данных векторных подпространств

$$\begin{cases} p^1+p^2-p^3-p^5=0, \\ 2p^1+p^2+3p^3+p^4-2p^5=0, \\ 3p^1-p^2-p^3-p^4+p^5=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} p^1+p^3-3p^5=0, \\ p^2+p^3+2p^4-2p^5=0, \\ p^3-2p^4+5p^5=0. \end{cases}$$

3. Вычислить координаты ортогональной проекции точки $M(2,–1,3, –1)$ на плоскость:

$$\Pi_2: \begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+1=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4+2=0. \end{cases}$$

4.Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4: $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2. \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=0. \end{cases}$

б) в E_5, заданных точками: $M_1(1,–2,2,–5,0)$, $M_2(3,1,4,–2, –3)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(0,0,1,–1,2)$ и $N_1(2,1,–3,4, –2)$, $N_2(7,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2-2x_2^2+x_3^2+3x_4^2+4x_1x_2-10x_1x_3+4x_2x_3-2x_1-4x_4=0.$$

Является квадрика центральной? Если да, найдите его центр.

Вариант 9

1. Выяснить, является ли форма

$$g(\vec{x},\vec{y})=2x^1y^1+4x^2y^2-3x^2y^3-3x^3y^2+4x^1y^2$$

симметрической, положительно определенной?

2. В аффинном пространстве A_5 дана система координат и точки $M(1,-1,2,3,5)$, $P(0,-2,3,0,1)$, $K(1,-1,1,-1,0)$, $(MP,A)=-2$, $(PB,K)=3$, $(CK,M)=1/2$. Найдите координаты точек A,B,C.

3. Найти расстояние от точки A $(–2,0,–2,1)$ до прямой

$$l: \ x_1=-2\lambda, \quad x_2=-\lambda+1, \quad x_3=\lambda+2, \quad x_4=\lambda-1.$$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4:

$$\begin{cases} x_1-3x_2+5x_3-2x_4=1, \\ 2x_1-6x_2-3x_4=2. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1-3x_2-5x_3-x_4=1, \\ 2x_1+x_2-2x_3+5x_4=0. \end{cases}$$

б) в E_5, заданных точками:

$M_1(1,–2,2,–5,0)$, $M_2(3,1,4,–2,3)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(0,4,2,–1,3)$ и $N_1(1,1,–3,4,2)$, $N_2(4,1,1,6,5)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+x_4^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3-4x_1+8x_2-12x_3=0.$$

Является квадрика центральной? Если да, найдите его центр.

Вариант 10

1. Выяснить, является ли форма

$$g(\vec{x},\vec{y})=x^1y^1+2x^2y^2+3x^3y^3$$

симметрической, положительно определенной?

2. Составить общие уравнения плоскости, зная координаты точки $M_0(1,-5,6,-1,1)$ и систему, задающую направляющее подпространство

$$\begin{cases} 2p^1-2p^2+3p^4-8p^5=0, \\ p^1+4p^3-3p^5=0, \\ p^1+p^2-p^3-p^4=0. \end{cases}$$

3. Найти расстояние от точки A $(1,1,–2, –1)$ до прямой

$$l: \ x_1=\lambda, \quad x_2=-\lambda+1, \quad x_3=\lambda+2, \quad x_4=2\lambda-1.$$

4. Выяснить взаимное расположение следующих многомерных плоскостей:

а) в E_4:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases} \quad \text{и} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1.$$

б) в E_5, заданных точками:
$M_1(0,0,0,–1,2)$, $M_2(6,3,7,–4,–5)$, $M_3(–2,1,0,–4,0)$, $M_4(5,2,–2,0,0)$
и $N_1(2,–1,–3,4,2)$, $N_2(3,0,2,0,–3)$, $N_3(1,2,3,–4,3)$.

5. Привести к каноническому виду и определить вид квадрики

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3 = 0.$$

Является квадрика центральной? Если да, найдите его центр.

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), описание шкал оценивания

Семестр 2

Рейтинг-план дисциплины

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный **0**	Максимальный **100**
Модуль 1. Векторная алгебра. Прямые на плоскости				**50**
Текущий контроль				**40**
1. Аудиторная работа	1	10	0	10
2. Домашняя работа	1	10	0	10
3. Устный опрос	1	20	0	20
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. Контрольная работа.	1	10	0	10
Модуль .2 Кривые второго порядка			**0**	**50**
Текущий контроль				**40**
1. Аудиторная работа	1	10	0	10
2. Домашняя работа	1	10	0	10
3. Устный опрос	1	20	0	20
Рубежный контроль			**0**	**10**
1. Индивидуальные задания.	1	10	0	10
Пропуски занятий (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			**0**	**–6**
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			**0**	**–10**
Итоговый контроль				
экзамен				**30**

Семестр 3

Рейтинг-план дисциплины

Виды учебной деятельности студентов	Балл за конкретное задание	Число заданий за семестр	Баллы	
			Минимальный **0**	Максимальный **100**
Модуль 1. Прямые и плоскости в трехмерном пространстве				**50**
Текущий контроль				**40**
1. Аудиторная работа	1	10	0	10
2. Домашняя работа	1	10	0	10
3. Устный опрос	1	20	0	20
Рубежный контроль			**0**	**20**
1. Контрольная работа.	1	10	0	10
Модуль .2 Поверхности второго порядка			**0**	**50**
Текущий контроль				**40**
1. Аудиторная работа	1	10	0	10
2. Домашняя работа	1	10	0	10
3. Устный опрос	1	20	0	20
Рубежный контроль			**0**	**10**
1. Индивидуальные задания.	1	10	0	10
Пропуски занятий (баллы вычитаются из общей суммы набранных баллов)				
1. Посещение лекционных занятий			**0**	**–6**
2. Посещение практических (семинарских, лабораторных занятий)			**0**	**–10**
Итоговый контроль				
Дифференцированный зачет				**0**

Критерии оценивания устного ответа

Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение доказывать основные теоремы и применять определения, формулы в конкретных случаях.

Критерии оценивания:

1) полнота и правильность ответа;

2) степень осознанности, понимания изученного;

3) языковое оформление ответа.

Студент получает один балл, если:

1) полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
2) понимает и знает идеи доказательств основных теорем;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;

Студент не получает баллы, если студент не может ответить на большинство вопросов, вынесенных на занятие.

Оценочные средства	Описание	Критерии оценки
Аудиторная контрольная работа	Письменное выполнение заданий по вариантам в аудитории в установленное время (90 мин.)	Надо выполнить 5 задания из предлагаемых в контрольной работе. . За каждую правильно решенную задачу ставится 5 баллов. Если при решении допущена ошибка вычислительного характера, то 3 балла. Если задача решена частично, то 1 балл. Максимальное количество баллов за контрольную работу - 25.
Индивидуальное задание	Письменное домашнее выполнение индивидуальных заданий по графику	Достаточно решить любые 5 задач. За каждую правильно решенную задачу ставится 2 балла. Если при решении допущена ошибка вычислительного характера, то 1 балла. Если задача решена частично, то 1 балл. Максимальное количество баллов, которое можно набрать -10
Устный опрос	Устные ответы студентов на вопросы из списка, который предоставляется заранее	Полный ответ на вопрос оценивается в 2 балов, ответ с недочетами - 1 баллов, слабый ответ - 0 баллов.
Контрольная работа	Письменное выполнение контрольная работа предусматривается в каждом семестре	Правильно выполненная работа оценивается в 1 балл. В случае невыполнения домашнего задания, студент получает 0 баллов.

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие. При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции. Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40% Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный балл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично». Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов БашГУ:

На дифференцированном зачете выставляется оценка: • отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов), • хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов, 26

• удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов, • неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

На зачете выставляется оценка: • зачтено - при накоплении от 60 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов), • не зачтено - при накоплении от 0 до 59 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.

Результаты обучения по дисциплине (модулю) у обучающихся оцениваются по итогам текущего контроля количественной оценкой, выраженной в рейтинговых баллах. Оценке подлежит каждое контрольное мероприятие.

При оценивании сформированности компетенций применяется четырехуровневая шкала «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Максимальный балл по каждому виду оценочного средства определяется в рейтинг-плане и выражает полное (100%) освоение компетенции.

Уровень сформированности компетенции «хорошо» устанавливается в случае, когда объем выполненных заданий соответствующего оценочного средства составляет 80-100%; «удовлетворительно» – выполнено 40-80%; «неудовлетворительно» – выполнено 0-40%

Рейтинговый балл за выполнение части или полного объема заданий соответствующего оценочного средства выставляется по формуле:

Рейтинговый балл = k × Максимальный балл,

где k = 0,2 при уровне освоения «неудовлетворительно», k = 0,4 при уровне освоения «удовлетворительно», k = 0,8 при уровне освоения «хорошо» и k = 1 при уровне освоения «отлично».

Оценка на этапе промежуточной аттестации выставляется согласно Положению о модульно-рейтинговой системе обучения и оценки успеваемости студентов БашГУ:

На экзамене и дифференцированном зачете выставляется оценка:

• отлично - при накоплении от 80 до 110 рейтинговых баллов (включая 10 поощрительных баллов),

• хорошо - при накоплении от 60 до 79 рейтинговых баллов,

• удовлетворительно - при накоплении от 45 до 59 рейтинговых баллов,

• неудовлетворительно - при накоплении менее 45 рейтинговых баллов.

При получении на экзамене оценок «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», на зачёте оценки «зачтено» считается, что результаты обучения по дисциплине (модулю) достигнуты и компетенции на этапе изучения дисциплины (модуля) сформированы.